UBAXXI - Álgebra A - Resolución Examen Final - 11/12/24 - Tema 1

- Ejercicio 1 (1.25 pto.)
  Considerá los vectores de $\mathbb{R}^2$, $\vec{v} = (\sqrt{2}; \sqrt{2})$, $\vec{w}$, $\vec{u}$ y k un número real. Se sabe que $\vec{w}$ es el opuesto de $\vec{v}$ y que $\vec{u} = \frac{1}{2} \cdot \vec{v}$ Indicá el valor que debe tomar k para que se verifique la siguiente igualdad: $||4 \cdot (\vec{w} + \vec{u}) - 2 \cdot \vec{v}|| + ||\vec{v}|| = k \cdot || - 8 \cdot \vec{v}||$.

  A) $\dfrac{1}{2}$ B) $\dfrac{8}{5}$ C) $\dfrac{5}{8}$ D) $\dfrac{1}{8}$

  Opción correcta: C)
  Resolución
  Tenemos que $\vec{v} = (\sqrt{2}; \sqrt{2})$ $\vec{w} = (-\sqrt{2}; -\sqrt{2})$ $\vec{u} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ entonces:
  $4\left((-\sqrt{2}; -\sqrt{2}) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = 4\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ y por lo tanto
  $4\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - 2(\sqrt{2}; \sqrt{2}) = (-4\sqrt{2}; -4\sqrt{2})$ y $||(-4\sqrt{2}; -4\sqrt{2})|| = 8$.
  Por otro lado, $|| - 8 \cdot \vec{v}|| = ||(-8\sqrt{2}; -8\sqrt{2})|| = 16$ entonces $8 + 2 = k \cdot 16$ nos da $k = \frac{5}{8}$.
  Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 1.

- Ejercicio 2 (1.25 pto.)
  Calculá la distancia entre el plano π de ecuación $-8x - 6y - 24z = 2$ y el punto de coordenadas $A = (6; 4; 11)$.

  Respuesta: 13
  Resolución
  Para calcular la distancia de A al plano π se puede hallar la distancia de A a un punto B, si B es la proyección ortogonal de A sobre el plano π. Primero construimos la recta L que pase por A y sea ortogonal al plano π, usando como dirección el vector normal al plano. Luego calculamos las coordenadas de $B = L \cap \pi = \{(2; 1; -1)\}$. Una vez que obtenemos B calculamos $||A - B||$ lo que nos dará el valor de la distancia entre A y π. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 3.

- Ejercicio 3 (1.25 pto.)
  Considerá los subespacios $S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 : x_1 + x_3 - x_5 = 0; -2x_1 + 2x_5 = 0\}$ y $T = \langle(-5, 5, 0, 5, -5); (1, 0, 0, 1, 0)\rangle$. Indicá cuál es la única afirmación cierta.

  A) $\vec{v} = (1, -1, 0, -1, 1)$ pertenece a S y no pertenece a T.
  B) $\vec{w} = (0, -1, 0, -2, 1)$ no pertenece a S y no pertenece a T.
  C) $\vec{v} = (1, -1, 0, -1, 1)$ pertenece a T y no pertenece a S.
  D) $\vec{w} = (0, -1, 0, -2, 1)$ pertenece a T y no pertenece a S.

  Opción correcta: D)
  Resolución
  El vector $\vec{v}$ pertenece a S pues cumple las ecuaciones de este, además es múltiplo de uno de los generadores de T por lo tanto también pertenece a T. En cuanto al vector $\vec{w}$, podemos ver que como no cumple una de las ecuaciones de S no pertenece a dicho subespacio. Además, $\vec{w}$ es combinación lineal de los elementos de T, entonces pertenece a este subespacio. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 4.

- Ejercicio 4 (1.25 pto.)
  Una elipse tiene ecuación $x^2 + ky^2 - 16x = 0$ con $k \in \mathbb{R} - \{0\}$ y uno de sus focos es $F_1 = \left(8 + \sqrt{\frac{128}{3}}, 0\right)$. Determiná el valor de k.

  Respuesta: 3
  Resolución
  Completando cuadrados y despejando convenientemente se obtiene $\frac{(x-8)^2}{64} + \frac{y^2}{\frac{64}{k}} = 1$ por lo que el centro de la elipse tiene coordenadas $(8, 0)$. Teniendo en cuenta la información brindada respecto del foco, resulta $c = \sqrt{\frac{128}{3}}$, y debe cumplirse $64 = \frac{64}{k} + \frac{128}{3}$. A partir de lo cual puede determinarse el valor de k. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 5.

- Ejercicio 5 (1.25 pto.)

Considerá el siguiente sistema de ecuaciones: $\begin{cases} 3x + y + mz & = 1 \\ x - y + 2z & = -2 \\ 5x + (m+1)y + 2z & = 4 \end{cases}$

Elegí la opción que indica el valor de $m \in \mathbb{R}$ de manera tal que el sistema sea compatible indeterminado.

A) -4 B) 4 C) 2 D) -2

Opción correcta: C)
Resolución
Si el determinante de la matriz asociada al sistema es nulo, puede ocurrir que el sistema tenga infinitas soluciones o bien no tenga solución. En este caso, esto sucede para $|m| = 2$. Así quedan descartadas las dos primeras opciones. Si $m = -2$, el sistema no tiene solución. Se puede comprobar que con $m = 2$ el sistema sí es compatible indeterminado. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 8.

- Ejercicio 6 (1.25 pto.)

Considerá las transformaciones lineales T_1 y T_2 cuyas matrices asociadas son: $M_{T_1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $M_{T_2} = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 3 \\ 1 & 0 & p \end{pmatrix}$ con $p \in \mathbb{R}$. Indicá el valor de p para que la transformación lineal $T_2 \circ T_1$ no sea isomorfismo.

Respuesta -15
Resolución
Primero calculamos la matriz de la composición indicada al multiplicar $M_{T_2} \cdot M_{T_1}$, obteniendo: $M_{T_2 \circ T_1} = \begin{pmatrix} -7 & -9 \\ p+1 & p-3 \end{pmatrix}$. Como queremos que $T_2 \circ T_1$ no sea isomorfismo, veamos para qué valor de p la matriz no es inversible o lo que es equivalente, busquemos el valor de p para el cual su determinante es cero. Esto último ocurre solo para $p = -15$.
Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 12.

- Ejercicio 7 (1.25 pto.)

Si $z = (2+3i)^6$, elegí la opción que corresponde a un número complejo que se ubique en el mismo cuadrante en que se encuentra z.

A) $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + i\text{sen}\left(\frac{\pi}{5}\right)$

C) $-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$

B) $2e^{i\frac{4\pi}{3}}$

D) $1 - \sqrt{3}i$

Opción correcta: D)
Resolución
El argumento de $2+3i$ se calcula como $\alpha = arctan\left(\frac{3}{2}\right)$. Como se pide el argumento de $(2+3i)^6$ entonces, por las propiedades de los complejos, el argumento se calcula como $\alpha = arctan\left(\frac{3}{2}\right) \cdot 6$ este es un ángulo del cuarto cuadrante. Si observamos las opciones vemos que A) tiene un ángulo entre 0 y $\frac{\pi}{2}$, o sea está en el primer cuadrante. Mientras que B) está entre π y $\frac{3\pi}{2}$ o sea en el tercer cuadrante. Por los signos del complejo del ítem C) sabemos que pertenece al segundo cuadrante. Finalmente D) $1 - \sqrt{3}i = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right)$ tiene su argumento en el cuarto cuadrante, por lo tanto es la respuesta correcta. Estos contenidos los encontrás en la sesión 13.

- Ejercicio 8 (1.25 pto.)
  $A(x) \in \mathbb{R}[x]$ es un polinomio de grado mínimo que tiene como raíces a z_1 , z_2 y z_3.
  Si $(2+2i) \cdot z_1 = -7-7i$; $z_2 = (3-i)^2$ y $z_3 = -10$ es raíz doble, calculá el valor exacto de la suma de todas las raíces distintas de $A(x)$.

  Respuesta: $\dfrac{5}{2}$
  Resolución
  De la primera igualdad resulta $z_1 = -\frac{7}{2}$ y de la segunda $z_2 = 8-6i$; $\bar{z}_2 = 8+6i$ también es raíz de $A(x)$, resulta entonces $-\frac{7}{2} + 8 + 6i + 8 - 6i - 10 = \frac{5}{2}$ Estos contenidos los podés encontrar en las sesiones 13 y 14.