ANÁLISIS MATEMÁTICO A (INGENIERIA Y CS. EXACTAS)(66) -Cátedra Cabana

SEGUNDO PARCIAL - 5/11/2024 - TEMA 4

1. Considere la función $h(x) = x\int_0^x e^{t^2}dt + 9$

   a) (1 punto) Calcular $h''(x) =$....................$2e^{x^2}(1+x^2)$ ....

   b) (1 punto) Hallar el polinomio de Taylor de orden 2 centrado en $x_0 = 0$ de la función h:..................$P(x) = 9 + x^2$.......................

   Resolución:

   Se deriva con regla del producto, en el segundo término se utiliza el teorema fundamental del cálculo $h'(x) = 1.\int_0^x e^{t^2}dt + x.e^{x^2}$

   derivando nuevamente: $h''(x) = e^{x^2} + e^{x^2} + xe^{x^2}\cdot 2x = 2e^{x^2}(1+x^2)$

   Así $h(0) = 9,\ h'(0) = 0$ y $h''(0) = 2$, el polinomio pedido es: $P(x) = 9 + 0.x + \frac{2}{2!}x^2$

2. (2 puntos) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con derivada continua en $\mathbb{R}$ y tal que $\int_{1/2}^1 \frac{f'(2x)}{x^2}dx = 10$. Calcular $\int_{1/2}^1 \frac{f(2x)}{x^3}dx$, sabiendo que $f(1) = 16$ y $f(2) = 12$.

   ....36......................................

   Resolución:

   Se aplica el método de partes en $\int_{1/2}^1 \frac{f(2x)}{x^3}dx$ tomando $u = f(2x)$ y $dv = x^{-3}$:

$$\int_{1/2}^1 \frac{f(2x)}{x^3}dx = -\frac{1}{2x^2}f(2x)\Big|_{\frac{1}{2}}^1 - \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{2f'(2x)}{-2x^2}dx = -\frac{1}{2}f(2) + \frac{1}{2.\frac{1}{4}}f(1) + 10 = 36.$$

3. (2 puntos) La suma de la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{4\cdot 3^n + 4^n}{7^n}$ es:

   - ■ $\frac{43}{21}$
   - □ $\frac{13}{3}$
   - □ $\frac{28}{3}$

- ☐ $\dfrac{13}{12}$

Resolución:

$\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{4\cdot 3^n+4^n}{7^n}=4\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{3}{7}\right)^n+\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{4}{7}\right)^n=4.\frac{1}{1-\frac{3}{7}}+\frac{1}{1-\frac{4}{7}}-5-\frac{16}{7}=\frac{43}{21}$ (se deben restar los dos primeros términos al utilizar la fórmula que comienza en n = 0)

4. (1 punto) El área de la región comprendida entre los gráficos de las funciones $f(x)=\dfrac{16}{(x-2)^2}$; $y=16$; $y=4$ se calcula resolviendo:

- ☐ $\displaystyle\int_0^1 (f(x)-4)dx\ +\int_3^4 (f(x)-4)dx$
- ■ $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx\ +\int_3^4 f(x)dx\ -8+24$
- ☐ $\displaystyle 2\int_0^1 f(x)dx\ +24$
- ☐ $\displaystyle\int_4^{16} (f(x)-4)dx$

Resolución:

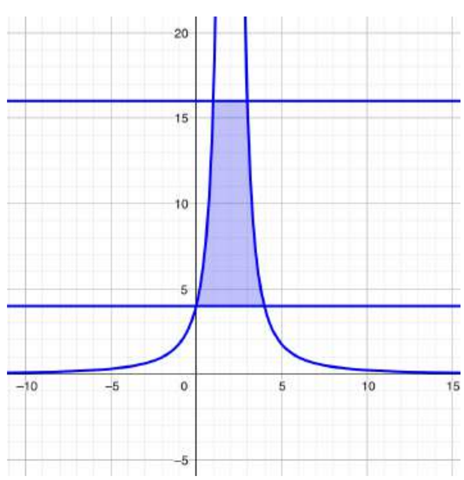
Para determinar los límites de integración: $\dfrac{16}{(x-2)^2}=16 \quad\longrightarrow x=1;\ x=3$

$\dfrac{16}{(x-2)^2}=4 \quad\longrightarrow x=0;\ x=4$

El área será:

$$\int_0^1 (f(x)-4)dx+\int_1^3 (16-4)dx+\int_3^4 (f(x)-4)dx=\int_0^1 f(x)dx\ +\int_3^4 f(x)dx\ -8+24$$

Gráfico:

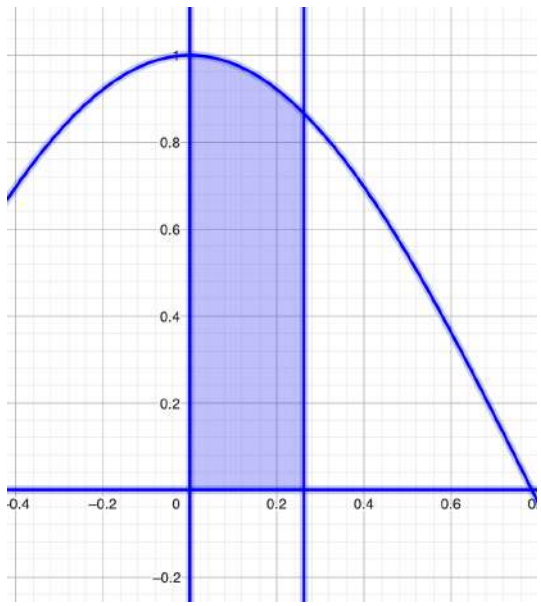


5. (1 punto) Determinar el valor de $a \in [0, \frac{\pi}{4}]$ sabiendo que el área encerrada por el gráfico de la función $f(x) = \cos(2x)$, el eje y, el eje x y la recta $x = a$ es $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

$a =$............$\dfrac{\pi}{8}$............................

Resolución:

El planteo del problema es $\displaystyle\int_0^a \cos(2x)\, dx = \frac{\sqrt{2}}{4}$, integrando tenemos $\displaystyle\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x)\Big|_0^a = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2a)$ por lo tanto, igualando al área del dato tenemos $\operatorname{sen}(2a) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \longrightarrow 2a = \dfrac{\pi}{4}$, entonces $a = \dfrac{\pi}{8}$.



6. (2 puntos) Calcular $\displaystyle\int \frac{\sqrt{3x} - 3x^4\cos(x)}{x^3} dx =$

............$-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}x^{-\frac{3}{2}} - 3x\operatorname{sen}(x) - 3\cos(x) + C$..................................

Resolución:

$$\int \frac{\sqrt{3x} - 3x^4\cos(x)}{x^3} dx = \int \frac{\sqrt{3}\sqrt{x}}{x^2} dx - \int \frac{3x^4\cos(x)}{x^3} dx = \sqrt{3}\int x^{-\frac{5}{2}} dx - 3\int x\cos(x) dx =$$
$$-\frac{2\sqrt{3}}{3}x^{-\frac{3}{2}} - 3x\operatorname{sen}(x) - 3\cos(x) + C.$$