ANÁLISIS MATEMÁTICO A (INGENIERIA Y CS. EXACTAS)(66) -Cátedra Cabana

PRIMER PARCIAL - 23/09/2024 - TEMA 5

1. (1 punto) El valor de $a \in \mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+a}{x^2-6}\right)^{2x^2+1} = e^6$ es:

   $a =$............-3............................

   Resolución:

   $$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+a}{x^2-6}\right)^{2x^2+1} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-6+a+6}{x^2-6}\right)^{2x^2+1} = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{a+6}{x^2-6}\right)^{2x^2+1} =$$

   $$= \lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x^2-6}{a+6}}\right)^{\frac{x^2-6}{a+6}}\right]^{\frac{a+6}{x^2-6}(2x^2+1)} = e^{2a+12} = e^6 \text{ de donde } a = -3$$

2. Dada $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x+2} - \dfrac{1}{e^{x+2}-1} & x \neq -2 \\ \\ 2a+3 & x = -2 \end{cases}$

   a) (1 punto) Calcular $\lim\limits_{x\to-2} f(x) =$...........$\frac{1}{2}$......................

   b) (1 punto) Determinar el valor de $a \in \mathbb{R}$ para que f sea contínua en $x = -2$

   $a =$............$-\frac{5}{4}$..............................

   Resolución:

   $$\lim_{x\to-2}\left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{e^{x+2}-1}\right) = \lim_{x\to-2}\frac{e^{x+2}-1-x-2}{(x+2)(e^{x+2}-1)} \underset{LH}{=} \lim_{x\to-2}\frac{e^{x+2}-1}{1.(e^{x+2}-1)+(x+2)e^{x+2}} \underset{LH}{=}$$

   $$= \lim_{x\to-2}\frac{e^{x+2}}{e^{x+2}+e^{x+2}+(x+2)e^{x+2}} = \frac{1}{2}$$

   Como $f(-2) = 2a+3$ la función es continua si $2a+3 = \dfrac{1}{2} \iff a = -\dfrac{5}{4}$

3. (1 punto) Sea $g(x)$ una función derivable tal que $g(0) = \dfrac{\pi}{3}$, si $\cos(g(x)) = 2x - \sqrt{x^2+5x+4}$, el valor de $g'(0)$ es igual a:

   $g'(0) =$...... $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$..........................

   Resolución:

Derivando la expresión miembro a miembro: $-\operatorname{sen}(g(x))g'(x) = 2 - \dfrac{2x+5}{2\sqrt{x^2+5x+4}}$

evaluando en $x = 0$ y usando el dato $g(0) = \dfrac{\pi}{3}$ se llega a $g'(0) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

4. Dada $f(x) = 15x + \dfrac{80}{x^3}$ Determinar dónde se alcanzan el máximo y mínimo absolutos en el intervalo $[1; 3]$

   a) (1 punto) máximo absoluto en $x =$.......1.....................

   b) (1 punto) mínimo absoluto en $x =$.......2...................

   Resolución:

   $f'(x) = 15 + \dfrac{-240}{x^4}$, $\qquad f'(x) = 0 \iff x = 2$ o $x = -2$

   analizamos en el intervalo cerrado $[1; 3]$ por lo tanto el máximo se da en $x = 1$ y el mínimo en $x = 2$.

5. Sea la función $f(x) = \sqrt{x}e^{-36x^2+2}$

   a) (1 punto) sobre las asíntotas

   - ☐ $x = 0$ es asíntota vertical
   - ☐ $y = x$ es asíntota oblicua
   - ■ $y = 0$ es asíntota horizontal
   - ☐ no tiene asíntotas

   b) (1 punto)

   - ☐ f crece en $(0;\ 1)$
   - ■ f decrece en $\left(\dfrac{1}{12};\ +\infty\right)$
   - ☐ f crece en $\left(\dfrac{1}{12};\ +\infty\right)$
   - ☐ f decrece en $\left(0;\ \dfrac{1}{12}\right)$

   c) (1 punto)

   - ☐ en $x = -\dfrac{1}{12}$ hay un mínimo absoluto de f

- ☐ en $x = 0$ hay un máximo relativo de f
- ☐ en $x = 12$ hay un mínimo relativo de f
- ■ en $x = \frac{1}{12}$ hay un máximo absoluto de f

d) (1 punto) La imagen de f es: .... $\left[0;\ f(\frac{1}{12})\right]$ ....

Resolución:

$Dom\ f = [0;\ +\infty)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{e^{36x^2-2}} \underset{LH}{=} 0$ por lo tanto $y = 0$ es asíntota horizontal

$\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = 0$ no hay asíntota vertical

$$f'(x) = \frac{e^{-36x^2+2}}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x}(-72x)e^{-36x^2+2} = e^{-36x^2+2}(\frac{1-144x^2}{2\sqrt{x}})$$

puntos críticos: $x = \frac{1}{12}$ (se descarta $x = -\frac{1}{12}$ por no pertenecer al dominio)

intervalo de crecimiento: $\left(0;\ \frac{1}{12}\right)$

intervalo de decrecimiento: $\left(\frac{1}{12};\ +\infty\right)$