RECUPERATORIO PRIMER PARCIAL 12 de Noviembre 2024 Tema 7

1. (2 puntos) Sea $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos(6x)-1}{x} & x > 0 \\ \\ kx & x \leq 0 \end{cases}$

   Hallar $k \in \mathbb{R}$ para que la función sea derivable en todo su dominio.

   $k =$........$-18$.........

   Resolución:

   Observar que $f$ es continua para todo $k$ y derivable si $x \neq 0$. Se analizan los cocientes incrementales:

   $$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\dfrac{\cos(6h)-1}{h} - 0}{h} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos(6h)-1}{h^2} \underset{L\ddot{}H}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{-6\,\mathrm{sen}(6h)}{2h} \underset{L\ddot{}H}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{-36\cos(6h)}{2} = -18$$

   $$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{x\to 0^-} \frac{kh-0}{h} = k$$

   Por lo tanto debe ser $k = -18$

2. (1 punto) Sea $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+ax)+\mathrm{sen}(4x)}{x} & x \neq 0 \\ \\ 9 & x = 0 \end{cases}$

   Hallar todos los valores de $a \in \mathbb{R}$ para que la función sea continua en todo su domnio.

   $a =$........5.........

   Resolución:

   $$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+ax)+\mathrm{sen}(4x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{a}{1+ax} + 4\cos(4x)}{1} = a+4$$

   $f(0) = 9$, debe ser $a+4=9 \;\longrightarrow\; a=5$

3. (1 punto) Determinar $a \in \mathbb{R}$ para que la recta tangente al gráfico de $f(x) = (ax+2).e^{ax}$ en $x = 0$ sea $y = 6x + 2$.

   $a =$........2.........

   Resolución:

   $f(0) = 2$ dato que corrobora la recta en $x = 0$

   la pendiente es 6 entonces: $f'(x) = a.e^{ax} + (ax+2).a.e^{ax} \longrightarrow f'(0) = 3a$ por lo tanto $3a = 6 \longrightarrow a = 2$

4. (1 punto) Determinar todas las asíntotas verticales de la función $f(x) = \dfrac{\ln((x^2 - 3x + 2)}{x+1}$

   Asíntotas:........$x = -1,\ x = 1,\ x = 2$..........

   Resolución:

   Para determinar el dominio $f$ se debe calcular los intervalos de positividad de la función: $x^2 - 3x + 2 > 0$, además $x \neq -1$

   Así: $Dom(f) = (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (2; +\infty)$

   Se calculan los límites de $f$ con $x$ tendiendo a $-1$, 1 y 2 y se concluye que $x = -1,\ x = 1,\ x = 2$ son asíntotas verticales de $f$.

5. (2 puntos) Sea$f : D \to \mathbb{R}$ una función derivable. Sabiendo que la recta tangente al gráfico de$f$ en $x = 1$ es $y = 3x + 2$ , calcular:

   $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(4x-3) - 5}{x^2 - 1} =$ .......6..............

   Resolución:

   Por la ecuación de la recta tangente sabemos que $f'(1) = 3$ y $f(1) = 5$, así se tiene que el límite pedido es una indeterminación "0/0", aplicando L´Hopital: $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(4x-3) - 5}{x^2 - 1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{4f'(4x-3)}{2x} = \dfrac{12}{2} = 6$

6. Sea $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{9x^2 + 2}$

   (1 punto) sobre intervalos de crecimiento y decrecimiento:

- ☐ crece en el intervalo $(\frac{1}{3};\ +\infty)$

- ☐ crece en el intervalo $(0;\ +\infty)$

- ■ decrece en el intervalo $(\frac{1}{3}; \frac{2}{3})$

- ☐ decrece en el intervalo $(-\infty; \frac{2}{3})$

(1 punto) sobre los extremos:

- ■ en $x = \frac{2}{3}$ se realiza un mínimo

- ☐ en $x = 0$ se realiza un mínimo

- ☐ en $x = \frac{1}{3}$ se realiza un mínimo

- ☐ en $x = 1$ se realiza un mínimo

(1 punto) La imagen de la función es:

- ☐ $\left(0;\ \frac{1}{3}\right]$

- ☐ $\left(0;\ f(\frac{1}{3})\right]$

- ☐ $(f(\frac{1}{3});\ f(\frac{2}{3}))$

- ■ $(0;\ +\infty)$

Resolución:

$Dom(f) = \mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{2e^{2x}(9x^2+2) - e^{2x}18x}{(9x^2+2)^2} = \frac{2e^{2x}(9x^2-9x+2)}{(9x^2+2)^2}$$

se calculan los puntos críticos: $f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{3}$ o $x = \frac{2}{3}$

analizando el signo de la derivada en los intervalos $(-\infty;\ \frac{1}{3})$ ; $(\frac{1}{3};\ \frac{2}{3})$ y $(\frac{2}{3};\ +\infty)$ se concluye:

$f$ crece en $(-\infty;\ \frac{1}{3})$ y en $(\frac{2}{3};\ +\infty)$ y $f$ decrece en $(\frac{1}{3};\ \frac{2}{3})$ por lo tanto en $x = \frac{2}{3}$ hay un mínimo.

Además : $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, por lo cual $Im(f) = (0;\ +\infty)$