APELLIDO:	CALIFICACIÓN:
NOMBRE:	
DNI (registrado en SIU Guaraní):	
E-MAIL:	DOCENTE (nombre y apellido):
TEL:	
AULA:	

Tabla de uso exclusivo para el docente

	1	2	3	4
Puntaje de cada ejercicio	2,50	2,50	2,50	2,50

Duración del examen: 1h 40'. Completar los datos personales con letra clara, mayúscula e imprenta.

No se aceptarán respuestas en lápiz.

1. ¿Cuántas palabras se pueden formar, con o sin sentido, con las letras de la palabra "PALACIOS" si deben comenzar con "S" y terminar con "O"?

Buscamos utilizar las 8 letras de la palabra "PALACIOS" para armar los nuevos vocablos (independientemente de si éstos tienen o no sentido en nuestro idioma). Por otra parte, importa el orden en que se eligen las letras para formar dichos términos. Luego, estamos ante un caso de permutación o reordenamiento de elementos.

Siendo además que buscamos palabras que comienzan con "S" y finalizan con "O", en lugar de permutar los 8 caracteres disponibles, debemos reordenar solo 6 de ellos, aquellos que justamente ocupan las posiciones 2 a 7 dentro de cada nueva palabra.

Por otra parte, recordemos que:

> Cuando en los ***n*** elementos existen elementos repetidos (un elemento aparece ***a*** veces, otro aparece ***b*** veces, otro ***c*** veces, y el último ***r*** veces, verificándose que a + b + c +…+ r = n las permutaciones reciben el nombre de permutaciones con repetición.
>
> Su número se obtiene mediante la fórmula:
>
> $$P_n^{a,b,c,\ldots,r} = \frac{n!}{a!\cdot b!\cdot c!\cdot \ldots \cdot r!}$$

Luego,como hay 2 letras "A" disponibles entre las 6 a reordenar, tendremos:

$$P_6^{2,1,1,1,1} = \frac{6!}{2!\,1!\,1!\,1!\,1!} = \frac{6.5.4.3.2!}{2!} = 6.5.4.3 = 360$$

palabras distintas que pueden formarse con las 8 letras de la palabra "PALACIOS" y que además comienzan con "S" y terminan con "O".

2. Calcular la siguiente integral $\int \left(\boldsymbol{x} . \sqrt{\boldsymbol{x}+2} \right) \boldsymbol{dx}$

Para resolver estos ejercicios se tendrán en cuenta los temas abordados durante todo el cuatrimestre: Funciones- Operaciones con polinomios- Integrales inmediatas- Integrales por sustitución.

Designamos:

$u = x + 2 \quad \rightarrow u - 2 = x$

$du = dx$

Nos queda que:

$$\int \left(x . \sqrt{x+2} \right) dx = \int \left[(u-2)\sqrt{u} \right] du$$

Recordemos que $\sqrt{u} = u^{\frac{1}{2}}$

Por lo tanto, aplicando propiedad distributiva:

$$\int \left[(u-2) . u^{\frac{1}{2}} \right] du = \int \left(u^{\frac{3}{2}} - 2u^{\frac{1}{2}} \right) du = \int u^{\frac{3}{2}} \, du - \int 2u^{\frac{1}{2}} \, du =$$

$$= \frac{2}{5} \, u^{\frac{5}{2}} - 2 . \frac{2}{3} . u^{\frac{3}{2}} + C$$

Realizamos la sustitución correspondiente:

$$\int \left(x . \sqrt{x+2} \right) dx = \frac{2}{5} \, (x+2)^{\frac{5}{2}} - \frac{4}{3} . (x+2)^{\frac{3}{2}} + C$$

3. Dada $f(x) = e^{-x^3+12x}$, determinar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, y los máximos y mínimos relativos.

Lo primero que necesitamos conocer es el dominio de la función. Como su expresión no presenta ninguna restricción, el dominio es $Dom(f) = \mathbb{R}$.

Para hallar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, analizamos el signo de la derivada.

$f'(x) = e^{-x^3+12x}$. (-3$x^2 + 12$). Notamos que para hallar la derivada aplicamos la regla de la cadena por tratarse de una función compuesta, y que el dominio de esta coincide con el dominio de la función original. Utilizamos ahora el teorema de Bolzano aplicado a f' para saber cómo varía su signo en su dominio.

Calculamos el conjunto de ceros de f':

$e^{-x^3+12x}.(-3x^2 + 12) = 0$

Como la exponencial siempre toma valores positivos, la ecuación anterior es equivalente a

$-3x^2 + 12 = 0$

$-x^2 + 4 = 0$

$(2 - x).(2 + x) = 0$

$x = 2, x = -2$

Luego, el conjunto de ceros de la derivada es $C_0(f') = \{-2; 2\}$.

Evaluamos f' en algún punto del conjunto $(-\infty; -2)$ para ver su signo:

$f'(-3) = e^{27-36}.(-3.9 + 12) < 0$, luego, f' es negativa en $(-\infty; -2)$.

Análogamente, en el intervalo $(-2; 2)$:

$f'(0) = e^0.(0 + 12) = 12 > 0$, por lo que f' es positiva en $(-2; 2)$.

En $(2; +\infty)$ la derivada es nuevamente negativa ya que, por ejemplo,

$f'(3) = e^{-27+36}.(-3.9 + 12) < 0$.

De esta forma, por el criterio de la derivada el intervalo de crecimiento de la función f es $(-2; 2)$ y los intervalos de decrecimiento son $(-\infty; -2)$ y $(2; +\infty)$. Además, como la función decrece a la izquierda de -2 y crece a su derecha, entonces $x = -2$ es un mínimo relativo; y como f crece a la izquierda de 2 y decrece a su derecha, la abscisa $x = 2$ es un máximo relativo.

4. Determinar el/los valores de $k \in R$ para que el $|A| + |B| = 10$ si se sabe que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -k & 2k \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} k & -1 \\ -4 & k \end{pmatrix}$$

Hallamos $|A| = 2k + 3k, |B| = k^2 - 4$

$$|A| + |B| = 10$$

$$2k + 3k + k^2 - 4 = 10$$

$$k^2 + 5k - 14 = 0$$

$$k = 2, k = -7$$

Referencia: Unidad 9: Sistema de ecuaciones y matrices