12/06/2024

TEMA 11

APELLIDO:	CALIFICACIÓN:
NOMBRE:	
DNI (registrado en SIU Guaraní):	
E-MAIL:	DOCENTE (nombre y apellido):
TEL:	
AULA:	

Tabla de uso exclusivo para el docente

	1	2	3	4
Puntaje de cada ejercicio	2,50	2,50	2,50	2,50

Duración del examen: 1h 30'. Completar los datos personales con letra clara, mayúscula e imprenta.

No se aceptarán respuestas en lápiz.

1. Si $\int_0^1 f(x)dx = 2$; $\int_0^2 f(x)dx = 3$; $\int_0^1 g(x)dx = -1$ y $\int_0^2 g(x)dx = 4$, calcular $\int_1^2 [4f(x) - g(x) + 1]dx$ aplicando las propiedades de la integral definida.

Para resolver esta integral, aplicamos las propiedades de la integral definida:

$$\int_1^2 [4f(x) - g(x) + 1]dx$$

$$\int_1^2 4f(x)dx - \int_1^2 g(x)dx + \int_1^2 1dx$$

$$4\int_1^2 f(x)dx - \int_1^2 g(x)dx + \int_1^2 1dx$$

Gracias a los datos del enunciado y a las propiedades de la integral definida podemos plantear $\int_1^2 f(x)dx = \int_0^2 f(x)dx - \int_0^1 f(x)dx$ y $\int_1^2 g(x)dx = \int_0^2 g(x)dx - \int_0^1 g(x)dx - 1$. El último término de esta expresión es una integral inmediata:

$$4 \underbrace{\int_1^2 f(x)dx}_{\int_0^2 f(x)dx - \int_0^1 f(x)dx} - \underbrace{\int_1^2 g(x)dx}_{\int_0^2 g(x)dx - \int_0^1 g(x)dx} + \int_1^2 dx$$

$$4(3-2) - \big(4 - (-1)\big) + x\Big|_1^2$$

Reemplazamos y aplicamos la regla de Barrow

$$4(1) - (5) + (2-1) = 0$$

2. Hallar, si existen, los máximos y/o mínimos de la función $f(x) = 2x^{-\frac{1}{2}} + 6\,x^{\frac{3}{2}}$

En primer lugar, analizamos el dominio de la función: $f(x) = 2x^{-\frac{1}{2}} + 6\,x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{\sqrt{x}} + 6\sqrt{x^3}$

Como el denominador no puede ser cero y a su vez, la base de una raíz de índice par, no puede ser negativa, entonces:

$$\boldsymbol{Dom\ f(x)}: \mathfrak{R}^+$$

Para determinar si la función dada tiene extremos relativos, derivamos la función.

$f\,'(x) = -x^{-\frac{3}{2}} + 9x^{\frac{1}{2}}$

Analizamos los puntos críticos, estos son los valores de x para los cuales la derivada no existe y los valores de x para los cuales la derivada es 0.

Teniendo en cuenta el primer caso (los valores para los cuales no existe la derivada), el valor x=0 que anula el denominador de $f'(x)$ podría ser un punto crítico, pero como este valor no pertenece al dominio de la función, lo descartamos.

Buscamos luego los valores que anulan a la derivada.

$$f'(x) = 0$$

$$-\frac{1}{\sqrt{x^3}} + 9\sqrt{x} = 0$$

$$\frac{-1 + 9\sqrt{x}.\sqrt{x^3}}{\sqrt{x^3}} = 0$$

Estos serán los valores para los cuales el numerador es 0, esto significa que:

$$-1 + 9\sqrt{x}.\sqrt{x^3} = 0$$

$$9\sqrt{x^4} = 1$$

$$x^2 = \frac{1}{9}$$

$$|x| = \frac{1}{3}$$

Por lo tanto, el punto crítico de la función es $x = \frac{1}{3}$ (recordemos que $x = -\frac{1}{3}$ no pertenece al dominio)

Determinamos, usando el criterio de la derivada primera, si existen extremos. Analizamos el signo de la derivada en los intervalos (0; 1/3) y (1/3;+∞).

Para ello tomamos algún valor de x que pertenezca a cada intervalo y evaluamos la derivada en él. Nos ayudamos con una tabla:

Intervalo	(0;1/3)	(1/3;+∞)
Para	x=0,25	x=1
Signo de $f'(x)$	$f'(0{,}25) < 0$	$f'(1)>0$

El signo de f' cambia de negativa a positiva en $x = \frac{1}{3}$, por lo que $f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{8}{3}\sqrt{3}$ es un mínimo local. Por lo tanto, el punto de coordenadas $\left(\frac{1}{3}; \frac{8}{3}\sqrt{3}\right)$ es un mínimo local.

3. Dados los vectores $\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{4}, -\boldsymbol{2})$ y $\boldsymbol{u} = (-\boldsymbol{1}, -\boldsymbol{3})$, determinar los valores de $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}$ para los cuales se verifica: $\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{v}.\boldsymbol{u}) = -\boldsymbol{80}$.

En la resolución del presente ejercicio empleamos el concepto de producto escalar entre vectores (ver el apunte de cátedra "Vectores en R2" disponible en el campus virtual)

Luego, si $\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{4}, -\boldsymbol{2})$ y $\boldsymbol{u} = (-\boldsymbol{1}, -\boldsymbol{3})$ entonces $\boldsymbol{v}.\boldsymbol{u}$ es un número real que se obtiene de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{v}.\boldsymbol{u} = \boldsymbol{4}.(-\boldsymbol{1}) + (-\boldsymbol{2}).(-\boldsymbol{3}) \rightarrow \ \boldsymbol{v}.\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{4} + \boldsymbol{6} = \boldsymbol{2}$$

Finalmente, de la igualdad $\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{v}.\boldsymbol{u}) = -\boldsymbol{80}$ planteamos: $\boldsymbol{2\alpha} = -\boldsymbol{80} \rightarrow \boldsymbol{\alpha} = -\boldsymbol{40}$

4. Resolver: $\int (3x^2 + 5x + 2)^6 \, . (6x + 5) dx$

Para la realización de este ejercicio se deben considerar los siguientes contenidos:

Sesión 9: Funciones exponencial

Sesión 10: Derivadas. Tabla de derivadas

Sesión 12: Integrales; Métodos de integración: sustitución

Es posible resolver esta integral mediante el método de sustitución:

$$\int (3x^2 + 5x + 2)^6 \, . (6x + 5) dx$$

Realizamos un cambio de variable: $u = 3x^2 + 5x + 2$ (1)

Derivando: $du = 6x + 5 \; dx$ (2)

Reemplazando (1) y (2) en la integral: $\int u^6 du$

Resolviendo la integral: $\frac{u^7}{7} + C$

Reemplazando por (1) en la expresión: : $\frac{(3x^2+5x+2)^7}{7} + C$