03/05/2024 **TEMA 6**

APELLIDO:	CALIFICACIÓN:
NOMBRE:	
DNI (registrado en SIU Guaraní):	
E-MAIL:	DOCENTE (nombre y apellido):
TEL:	
AULA:	

Tabla de uso exclusivo para el docente

	1	2	3	4
Puntaje de cada ejercicio	2,50	2,50	2,50	2,50

Duración del examen: 1h 30'. Completar los datos personales con letra clara, mayúscula e imprenta.

No se aceptarán respuestas en lápiz.

1. Hallar el valor de la constante $m \in \mathbb{R}$ para que $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -3$ siendo $f(x) = \frac{mx+6x-2}{3x-1}$

Solución

Para resolver este ejercicio trabajaremos con los contenidos correspondientes a la unidad de límite.

El objetivo del ejercicio es hallar el valor de m, utilizando la condición del límite, veamos que:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = -3$$

Reemplazamos a f(x) por la función Racional propuesta:

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{mx + 6x - 2}{3x - 1} \right) = -3$$

Resolvemos el límite tendiendo a infinito, sabiendo que el grado del numerador y el denominador es 1, por lo tanto:

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{\frac{mx}{x} + \frac{6x}{x} - \frac{2}{x}}{\frac{3x}{x} - \frac{1}{x}} \right) = -3$$

De esta forma se obtiene que el numerador tiende a $m + 6$ y el denominador tiende a 3. En consecuencia:

$$\frac{m + 6}{3} = -3$$

Resolvemos la ecuación obtenida:

Multiplicamos miembro a miembro por 3

$$\frac{m + 6}{3} . 3 = -3.3$$

Restamos miembro a miembro 6

$$m + 6 - 6 = -9 - 6$$

Por lo tanto:

$$m = -15$$

Verificamos:

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{-15x + 6x - 2}{3x - 1} \right) = -3$$

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{-9x - 2}{3x - 1} \right) = \frac{-9}{3} = -3$$

La condición queda verificada.

2. Hallar analíticamente los puntos del plano donde se cortan las funciones:

$$\boldsymbol{f(x) = -x^3 + 2x^2 - x - 1} \quad , \quad \boldsymbol{g(x) = -x^3 + x + 11}$$

Solución:

Para hallar los puntos donde se cortan ambas funciones debemos aplicar los conceptos trabajados en la unidad de Funciones y Ecuaciones. Es necesario recordar que el punto hallado debe pertenecer a ambas funciones en forma simultánea, por lo tanto $f(x) = g(x)$.

Veamos:

$$-x^3 + 2x^2 - x - 1 = -x^3 + x + 11$$

Resolvemos la ecuación obtenida igualando a cero:

$$-x^3 + 2x^2 - x - 1 + x^3 - x - 11 = 0$$

Aplicando la propiedad de cancelación podemos simplificar las expresiones x^3 y $-x^3$,

$$2x^2 - x - 1 - x - 11 = 0$$

Agrupamos los términos semejantes y se obtiene la siguiente ecuación cuadrática, para resolverla utilizaremos la fórmula Resolvente:

$$2x^2 - 2x - 12 = 0$$

Siendo;

$$a = 2 \qquad b = -2 \qquad c = -12$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (Fórmula\ resolvente)$$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4.2.(-12)}}{2.2}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 96}}{4}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{100}}{4}$$

$$x = \frac{2 \pm 10}{4}$$

De esta forma podemos obtener los siguientes valores:

$$x_1 = \frac{2 + 10}{4} = \frac{12}{4} = 3$$

$$x_2 = \frac{2 - 10}{4} = \frac{-8}{4} = -2$$

Ahora bien, una vez obtenidos los valores de las abscisas debemos calcular el valor de las ordenadas:

Sea $x_1 = 3$ calculamos $f(3) = -3^3 + 2.3^2 - 3 - 1 = -13$

Veamos que se obtiene el mismo valor si se calcula en g(x): $g(3) = -3^3 + 3 + 11 = -13$

Sea $x_2 = -2$ calculamos $f(-2) = -(-2)^3 + 2.(-2)^2 - (-2) - 1 = 17$

Veamos que se obtiene el mismo valor si se calcula: $g(-2) = -(-2)^3 + (-2) + 11 = 17$

Por lo tanto los puntos obtenidos son: $P = (3; -13)$ y $Q = (-2; 17)$

3. Hallar la función cuadrática que satisface:

- **La gráfica pasa por los puntos $A = (2; 0)$ y $B = (0; 6)$**
- **La abscisa del vértice está en $x_v = -1$.**

Solución

Para resolver este ejercicio se tendrán en cuenta los contenidos abordados en la unidad de Funciones lineal y cuadrática.

El objetivo del ejercicio es hallar la función cuadrática que satisface las condiciones pedidas, para resolverlo se deben tener en cuenta los datos que nos están aportando:

El punto $A = (2; 0)$ representa una raíz de la función buscada, el punto $B = (0; 6)$ la ordenada al origen y por último el $x_v = -1$ correspondiente al vértice.

La función cuadrática puede ser expresada de tres formas distintas:

Polinómica: $f(x) = ax^2 + bx + c$

Canónica: $f(x) = a.(x - x_v)^2 + y_v$

Factorizada: $f(x) = a.(x - x_1).(x - x_2)$

En este caso utilizaremos la forma factorizada, veamos:

La primera raíz que conocemos es la que corresponde al punto A, por lo tanto $x_1 = 2$

$$f(x) = a.(x - 2).(x - x_2)$$

Para hallar la segunda raíz tendremos en cuenta que: $x_v = \frac{x_1 + x_2}{2}$

Veamos que:

$$-1 = \frac{2 + x_2}{2}$$

Multiplicamos miembro a miembro por 2

$$-1.2 = \frac{2 + x_2}{2}.2$$

$$-2 = 2 + x_2$$

Resto miembro a miembro 2

$$-2-2=2-2+x_2$$

$$-4=x_2$$

Por lo tanto:

$$f(x)=a.(x-2).(x+4)$$

Para hallar el valor del coeficiente principal “a” vamos a utilizar el punto $B=(0;6)$ (la ordenada al origen)

Lo reemplazamos y se obtiene:

$$f(x)=a.(x-2).(x+4)$$

$$6=a.(0-2).(0+4)$$

$$6=a.(-2).4$$

Dividimos miembro a miembro por -8

$$\frac{6}{-8}=a.\frac{(-8)}{-8}$$

Y se obtiene:

$$-\frac{6}{8}=-\frac{3}{4}=a$$

En consecuencia, la ecuación de la función cuadrática es:

$$f(x)=-\frac{3}{4}.(x-2).(x+4)$$

4. Dadas las funciones $f(x) = 4x^2 - 16$ $g(x) = \frac{3}{x}$ hallar la función $(g \circ f)(x)$ y su dominio.

Solución

Para resolver este ejercicio trabajaremos con los conceptos abordados en las unidades correspondientes a funciones, particularmente composición de funciones y dominio de las mismas.

En primer lugar, debemos calcular la composición de ambas funciones y luego determinaremos el dominio de la función obtenida teniendo en cuenta las características que tenga.

Sean las funciones $f(x) = 4x^2 - 16$ $g(x) = \frac{3}{x}$, se pide:

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)]$$

El primer objetivo del ejercicio es hallar la composición entre ambas funciones, por lo tanto:

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g[4x^2 - 16]$$

Veamos que:

$$(g \circ f)(x) = \frac{3}{4x^2 - 16}$$

La función obtenida es una función Racional, recordando lo trabajado durante la cursada, sabemos que el dominio de estas funciones tiene restricciones en su denominador, es decir, no puede ser cero.

En consecuencia:

$$4x^2 - 16 = 0$$

Resolvemos la ecuación de grado 2:

$$4x^2 - 16 + 16 = 0 + 16 \ (Sumanos\ miembro\ a\ miembro\ 16)$$

$$4x^2 = 16 \ (dividimos\ en\ ambos\ miembros\ por\ 4)$$

$$\frac{4}{4}x^2 = \frac{16}{4}$$

Se obtiene:

$$x^2 = 4$$

Al despejar la "x" obtenemos:

$$|x| = \sqrt{4}$$

Dando por resultado:

$$|x| = 2$$

Por tanto, el $Dom\ (g \circ f)(x): R - \{-2; 2\}$