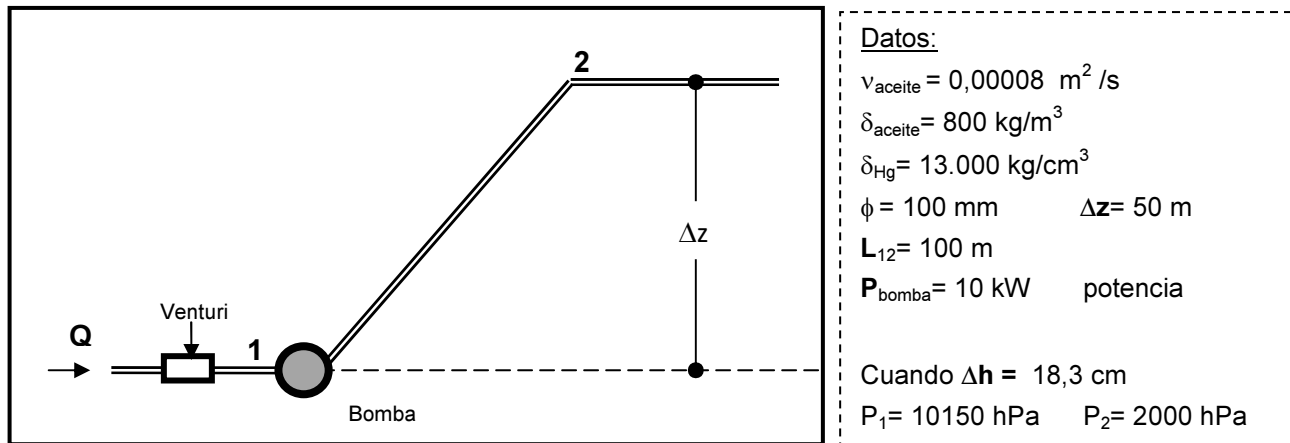


1. La figura muestra un tramo de cañería de diámetro constante (ϕ), por la que circula un caudal (Q) de aceite en régimen estacionario. El fluido ingresa a una bomba (1), para ser elevado al punto 2, luego continua por un tramo horizontal. En 1 y 2 se han colocado manómetros y en el tramo horizontal (antes de 1) hay un medidor de venturi (con manómetro diferencial con Hg y una relación de diámetros de 0,75).

- ✓ Calcular las pérdidas de cargas primarias (por viscosidad) entre 1 y 2 cuando el Δh del venturi marca 18,3 cm.
- ✓ Encontrar la diferencia de presiones entre 1 y 2, cuando el Δh del venturi marca 1,2 cm.
- ✓ Deducir una expresión que permita calcular la mínima potencia de la bomba, necesaria para que llegue un caudal Q (genérico) de aceite al punto 2. Dar el campo de validez e indicar de que depende la potencia deducida.



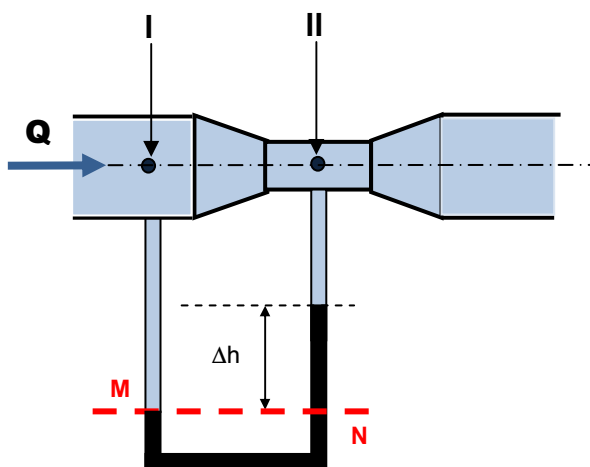
a) Pérdidas de carga continuas o primarias (debidas a la viscosidad)

Primeramente calcularemos el número de Reynolds para saber en qué tipo de régimen circula el fluido:

$$N_R = \frac{v \cdot \phi}{\nu} = \frac{Q \cdot \phi}{A \cdot \nu} = \frac{4 \cdot Q \cdot \phi}{\pi \cdot \phi^2 \nu} = \frac{4 \cdot Q}{\pi \cdot \phi \nu}$$

Este número depende del caudal de fluido que circula por la cañería, esta información nos la brinda el tubo de venturi.

Vinculamos energéticamente los puntos I y II, ubicados sobre una misma línea de corriente horizontal¹ del tubo de venturi colocado antes del punto 1 (tramo horizontal), donde:



- I: es un punto antes de la convergencia
- II: es un punto en la sección contraída

$$E_{HI} = E_{HII}$$

$$P_I + \rho \cdot g \cdot z_I + \frac{1}{2} \cdot \delta \cdot v_I^2 = P_{II} + \rho \cdot g \cdot z_{II} + \frac{1}{2} \cdot \delta \cdot v_{II}^2$$

tubo horizontal $\Rightarrow z_I = z_{II}$ luego, simplificando se obtiene:

$$P_I + \frac{1}{2} \cdot \delta \cdot v_I^2 = P_{II} + \frac{1}{2} \cdot \delta \cdot v_{II}^2 \quad \otimes$$

$\delta = \delta_f$: densidad del fluido que circula por la cañería.

¹ Dejamos de lado las pérdidas primarias y secundarias. En la práctica para minimizar estas pérdidas el ángulo de convergencia debe ser de 21° y el de divergencia de 5°. Pero, para reducir la longitud del aparato y su costo, esos ángulos se suelen llevar a 30° y 14° respectivamente.

Además el caudal que circula por el tubo es constante (líquido incompresible y sin pérdidas físicas), luego la ecuación de continuidad, plantea:

$$Q = A_I \cdot v_I = A_{II} \cdot v_{II} \quad \otimes \otimes$$

De \otimes se obtiene: $P_I - P_{II} = \frac{1}{2} \cdot \delta_f \cdot (v_{II}^2 - v_I^2)$

y de $\otimes \otimes$ $v_I = \frac{Q}{A_I}$ y $v_{II} = \frac{Q}{A_{II}}$

$$A_I = \pi \phi_I^2 / 4 = \pi (0,100 \text{ m})^2 / 4 \approx 0,00785 \text{ m}^2$$

$$A_{II} = \pi \phi_{II}^2 / 4 = \pi \cdot a^2 \cdot \phi_I^2 / 4 = a^2 \cdot A_I$$

Se define la relación de diámetros del venturi como: $\phi_{II} = a \cdot \phi_I$ con $0 < a < 1$

Donde ϕ_I es el diámetro de la cañería en nuestro caso 100 mm.

El valor de **a** en general varía entre 0,25 y 0,75 (generalmente 0,5). Un valor pequeño de **a** proporciona mayor precisión al aparato pero tiene el inconveniente de originar una reducción muy grande de la presión que permite la liberación de aire disuelto en el líquido o la vaporización de este, dando lugar al fenómeno de cavitación².

Reemplazando y agrupando: $P_I - P_{II} = \frac{1}{2} Q^2 \cdot \delta_f \cdot \left(\frac{1}{A_{II}^2} - \frac{1}{A_I^2} \right) = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{A_I^2} \cdot \delta_f \cdot \left(\frac{1}{a^4} - 1 \right) \quad \otimes \otimes \otimes$

El primer término de la expresión, la variación de presión entre los puntos I y II, puede ser leído en la diferencia de altura del manómetro diferencial Δh .

Elegimos dos puntos del manómetro que tienen la misma presión (sobre una línea horizontal y con un mismo fluido por debajo (Hg)), **N** y **M** (ver esquema), luego:

$$P_N = P_M$$

$$\left. \begin{aligned} P_M &= P_I + \delta_f \cdot g \cdot \Delta h \\ P_N &= P_{II} + \delta_{Hg} \cdot g \cdot \Delta h \end{aligned} \right\} P_I - P_{II} = g \cdot \Delta h (\delta_{Hg} - \delta_f) \quad \otimes \otimes \otimes \otimes$$

Despejando de $\otimes \otimes \otimes$ el caudal y reemplazado $\otimes \otimes \otimes \otimes$ tenemos: $Q = A_2 \cdot \frac{\sqrt{2 \cdot g (\delta_{Hg} - \delta_f)}}{\sqrt{\delta_f \left(\frac{1}{a^4} - 1 \right)}} \cdot \sqrt{\Delta h} = C_v \cdot \sqrt{\Delta h}$

La relación de diámetros **a**, define un factor: $C = \left(\frac{1}{a^4} - 1 \right)$. En nuestro caso $a=0,75$ entonces:

$$C = \left(\frac{1}{0,75^4} - 1 \right) \cong 2,16 \quad \rightarrow \quad Q = (0,00785) \sqrt{\frac{2 \cdot (9,8) \cdot (13.000 - 800)}{800 \cdot (2,16)}} \cdot \sqrt{\Delta h} \cong 0,092 \sqrt{\Delta h} \quad \otimes \otimes \otimes \otimes$$

En esta expresión si se coloca Δh en metros se obtiene el caudal **Q** en [m³/s].

² Este fenómeno ocurre si la presión en alguna sección del tubo es menor que la presión de vapor del fluido. Para este tipo particular de tubo, el riesgo de cavitación se encuentra en la garganta del mismo, ya que aquí, al ser mínima el área y máxima la velocidad, la presión es la menor que se puede encontrar en el tubo. Cuando ocurre la cavitación, se generan burbujas localmente, que se trasladan a lo largo del tubo. Si estas burbujas llegan a zonas de presión más elevada, pueden colapsar produciendo así picos de presión local con el riesgo potencial de dañar la pared del tubo.

Con $\Delta h = 0,183$ m se obtiene **Q = 0,0395 m³/s**

Este es el caudal que circula por la cañería cuando el desnivel del manómetro del venturi marca 18,3 cm. Con este valor calculamos el N_R :

$$N_R = \frac{v \cdot \phi}{\nu} = \frac{Q \cdot \phi}{A \cdot \nu} = \frac{4 \cdot Q \cdot \phi}{\pi \cdot \phi^2 \nu} = \frac{4 \cdot Q}{\pi \cdot \phi \nu} = \frac{4 \cdot 0,0395 \text{ m}^3 / \text{s}}{\pi \cdot 0,1 \text{ m} \cdot 0,00008 \text{ m}^2 / \text{s}} \approx 6.287 \rightarrow \text{Régimen Turbulento}$$

Este N_R (> 3600) nos indica que el aceite circula en régimen turbulento, fuera del campo de validez de la expresión de Hagen-Poiseuille³, para calcular pérdidas de carga: $\Delta E_\mu = \frac{8 \cdot L \cdot \mu \cdot Q}{\pi \cdot R^4}$

Por el momento no conocemos expresiones que nos permitan calcular pérdidas de carga para $N_R > 3600$, aunque lo podríamos expresar como "α Q²".

Pero no es necesario calcular las pérdidas con alguna fórmula tipo Poiseuille o Darcy-Weisbach, ya que tenemos toda la información energética necesaria para encontrarlas. Planteando la ecuación de Bernoulli entre 1 y 2

$$E_{H1} + E_{\text{bomba}} - \Delta E_{\mu 12} - \Delta E_{L12} = E_{H2} \quad (1)$$

donde⁴:

$$\left\{ \begin{array}{l} E_{H1} = P_1 + \delta \cdot g \cdot z_1 + \frac{1}{2} \cdot \delta \cdot v_1^2: \text{energía hidráulica en 1} \\ E_{H2} = P_2 + \delta \cdot g \cdot z_2 + \frac{1}{2} \cdot \delta \cdot v_2^2: \text{energía hidráulica en 2} \\ \Delta E_{\mu 12}: \text{pérdidas de carga continuas, debidas a la viscosidad} \\ \Delta E_{L12}: \text{pérdidas de carga localizadas, debidas al cambio en la dirección de las líneas de corriente}^5 \\ E_{\text{bomba}}: \text{energía que agrega la bomba} \end{array} \right.$$

desarrollando las componentes energéticas en 1 y 2 y despreciando las pérdidas localizadas, obtenemos:

$$P_1 + \delta \cdot g \cdot z_1 + \frac{1}{2} \cdot \delta \cdot v_1^2 + E_{\text{bomba}} - \Delta E_{\mu 12} = P_2 + \delta \cdot g \cdot z_2 + \frac{1}{2} \cdot \delta \cdot v_2^2 \quad (2)$$

El caudal que circula por la cañería es constante, al igual que el diámetro, luego $v_1 = v_2$

Ahora de (2) podemos despejar las pérdidas de carga entre 1 y 2,

$$\Delta E_{\mu 12} = E_{\text{bomba}} + (P_1 - P_2) + \delta \cdot g \cdot (z_1 - z_2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} {}^6 E_{\text{bomba}} = P_{\text{bomba}} / Q = 10.000 \text{ J/s} / 0,04 \text{ m}^3/\text{s} = 250.000 \text{ Pa} \\ P_1 - P_2 = (10.150 - 2.000) \text{ hPa} = 815.000 \text{ Pa} \\ {}^7 \delta \cdot g \cdot (z_1 - z_2) = 800 \text{ kg/m}^3 \cdot 9,8 \text{ m/s}^2 \cdot (-50 \text{ m}) = -392.000 \text{ Pa} \end{array} \right.$$

Reemplazando obtenemos:

$$\boxed{\Delta E_{\mu 12} = 673.000 \text{ Pa}} \quad (3)$$

³ Valida solamente en régimen laminar ($N_R < 2100$)

⁴ en (1) todos los términos se refieren a la energía por unidad de volumen (J/m³)

⁵ en nuestros cálculos dejamos de lado las pérdidas de carga localizadas (la de la bomba y sus accesorios), asumiendo que esta son despreciables frente a E_{H1} .

⁶ Potencia = Energía/tiempo = Fuerza * velocidad = Presión * Área * velocidad = Presión * Caudal

⁷ Tomamos como referencia la horizontal que pasa por 1.

Si hubiéramos aplicado Hagen-Poiseuille, el valor obtenido sería:

$$\Delta E_{\mu} = \frac{8.L.\mu.Q}{\pi.R^4} = \frac{8.(100\text{ m}).(0,00008\text{ m}^2/\text{s}).(800\text{ kg}/\text{m}^3).(0,0395\text{ m}^3/\text{s})}{\pi.(0,05\text{ m})^4} \cong 103.003\text{ Pa}$$

Este valor es menor que el obtenido en (3), tengamos presente que en el régimen turbulento las pérdidas de carga son proporcionales al cuadrado del caudal.

b) Reducción del Δh del Venturi

Si el Δh del venturi marca **1,2 cm**, el caudal que circula por la cañería se reduce.

La expresión $\otimes\otimes\otimes\otimes$ nos permite calcularlo, $Q \cong 0,092\sqrt{\Delta h} = 0,092\sqrt{0,012} = 0,01\frac{\text{m}^3}{\text{s}}$

En esta situación, con el $Q=0,01\text{ m}^3/\text{s}$ y manteniendo constante el diámetro, se modifica la velocidad de circulación del fluido y en consecuencia su N_R , veamos:

$$N_R = \frac{v.\phi}{\nu} = \frac{Q.\phi}{A.\nu} = \frac{4.Q.\phi}{\pi.\phi^2\nu} = \frac{4.Q}{\pi.\phi\nu} = \frac{4.0,01\text{ m}^3/\text{s}}{\pi.0,1\text{ m}.0,00008\text{ m}^2/\text{s}} \approx 1.592 \rightarrow \text{Régimen Laminar}$$

Ahora sí!, podemos aplicar Hagen-Poiseuille, para calcular las pérdidas de carga primarias:

$$\Delta E_{\mu} = \frac{8.L.\mu.Q}{\pi.R^4} = \frac{8.(100\text{ m}).(0,00008\text{ m}^2/\text{s}).(800\text{ kg}/\text{m}^3).(0,01\text{ m}^3/\text{s})}{\pi.(0,05\text{ m})^4} \cong 26.077\text{ Pa}$$

Para calcular la diferencia de presiones utilizamos la expresión (2)

$$P_1 + \delta.g.z_1 + \frac{1}{2} . \delta.v_1^2 + E_{\text{bomba}} - \Delta E_{\mu 12} = P_2 + \delta.g.z_2 + \frac{1}{2} . \delta.v_2^2$$

De donde: $(P_1 - P_2) = \Delta E_{\mu 12} - E_{\text{bomba}} + \delta.g.(z_2 - z_1)$

$$E_{\text{bomba}} = P_{\text{bomba}} / Q = 10.000\text{ J/s} / 0,01\text{ m}^3/\text{s} = 1.000.000\text{ Pa}$$

Reemplazando valores obtenemos:

$$(P_1 - P_2) = 26.077\text{ Pa} - 1.000.000\text{ Pa} + 392.000\text{ Pa} = 168.077\text{ Pa} \rightarrow \Delta P_{12} = - 581.923\text{ Pa}$$

No conocemos las presiones en 1, ni en 2, pero si la diferencia entre ellas. Ahora, esta diferencia es negativa, la presión en 2 es mayor a la presión en 1.

La presión en dos disminuye pues aumenta la cota topográfica y parte de la energía se disipa por la viscosidad (pérdidas de carga primarias), pero en este caso aumenta mucho porque la presión que inyecta la bomba es inversamente proporcional a Q, y Q es mucho menor ahora, y porque también al ser Q mucho menor, son mucho menores las pérdidas.

c) Potencia mínima de la bomba

Para deducir una expresión que permita calcular la mínima potencia de la bomba, necesaria para que llegue un caudal Q de fluido al punto 2, plantearemos Bernoulli entre 1 y 2:

$$P_1 + \delta \cdot g \cdot z_1 + \frac{1}{2} \cdot \delta \cdot v_1^2 + E_{\text{bomba}} - \Delta E_{\mu 12} = P_2 + \delta \cdot g \cdot z_2 + \frac{1}{2} \cdot \delta \cdot v_2^2$$

Donde: $E_{\text{bomba}} = \text{Pot}_{\text{bomba}} / Q$

Luego: $E_{\text{bomba}} = \delta \cdot g \cdot (z_2 - z_1) + \Delta E_{\mu 12} + (P_2 - P_1)$

- Independientemente del caudal que circule por este tramo de cañería, si no variamos el diámetro y el caudal permanece constante las velocidades en 1 y 2 serán iguales.
- Buscamos la potencia mínima para que llegue el caudal a 2, luego la presión en 2 será nula (no precisamos energía extra).
- La energía asociada a la diferencia de alturas, está definida y vale 392.000 Pa ($\delta \cdot g \cdot z_2$)
- Las pérdidas de carga primarias son dependientes del caudal. Si estamos en régimen laminar podemos usar Hagen-Poiseuille (pérdidas proporcionales al caudal), en cambio en régimen turbulento las pérdidas serán proporcionales al cuadrado del caudal.

Con todas estas consideraciones escribimos:

$$\text{Pot}_{\text{bomba}} / Q = \delta \cdot g \cdot (z_2) + \Delta E_{\mu 12} + (-P_1) \rightarrow \text{Pot}_{\text{bomba}} = (392.000 \text{ Pa} + \Delta E_{\mu 12} - P_1) \cdot Q \quad (4)$$

Es decir, la potencia mínima requerida, tiene tres términos energético, el primero asociado a la energía necesaria para subir el fluido hasta 2 (392.000 Pa), el siguiente necesario para "salvar" las pérdidas de carga por viscosidad y el tercero hace referencia a la energía disponible en 1, que puede ser utilizada en este objetivo (por eso el signo menos).

En cuanto a las pérdidas de carga, deberíamos conocer en qué tipo de régimen está circulando el fluido, para ello nos valdremos del N_R . Como referencia, calculamos el máximo caudal en régimen laminar:

$$N_R = \frac{V \cdot \phi}{\nu} = \frac{4Q}{\pi \phi \nu} = 2100 \rightarrow Q = \frac{2100 \cdot \nu \cdot \phi \cdot \pi}{4} = \frac{2100 \cdot 0,00008 \text{ m}^2 / \text{s} \cdot 0,1 \text{ m} \cdot \pi}{4} \cong 0,013 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Q \leq 0,013 \text{ m}^3/\text{s} \quad \text{REGIMEN LAMINAR} \\ Q > 0,013 \text{ m}^3/\text{s} \quad \text{NO TENEMOS CERTEZA SI/ RÉGIMEN LAMINAR (turbulencia } N_R \geq 3600) \end{array} \right.$$

0,013 m³/s, es el máximo caudal de aceite que puede circular por una cañería $\phi = 0,1$ m, en régimen laminar.

Luego si $Q \leq 0,013 \text{ m}^3/\text{s}$, podemos calcular las pérdidas de carga primarias mediante Hagen-Poiseuille:

con la información disponible se obtiene⁸: $\Delta E_{\mu 12} = \frac{8 \cdot (100) \cdot (800) \cdot (0,00008) \cdot Q}{\pi \cdot (0,05)^4} = 6.607.671,5 Q$

Volviendo a (4):

$$\text{Pot}_{\text{bomba}} = (392.000 - P_1) \cdot Q + 6.607.671,5 Q^2$$

Se trata de un polinomio de grado dos, valido solo si $0 \leq Q \leq 0,013 \text{ m}^3/\text{s}$

Si $Q > 0,013 \text{ m}^3/\text{s}$ no conocemos, por el momento, la expresión que nos permita calcular las pérdidas de carga primaria, pero sabemos que estas son proporcionales al cuadrado del caudal⁹

En esta última situación escribimos:

⁸ Los valores están expresados en las unidades del SI, luego si Q en [m³/s] obtenemos las pérdidas en [Pa].

⁹ Lo analizamos experimentalmente en el laboratorio

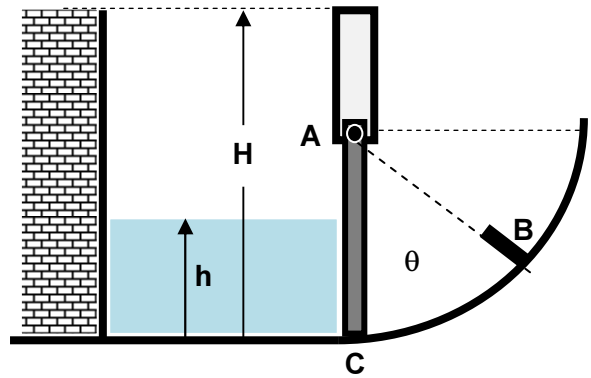
$$\text{Pot}_{\text{bomba}} = (392.000 - P_1) \cdot Q + \Delta E_{\mu 12} \cdot Q$$

Donde $^{10}\Delta E_{\mu 12} \propto Q^2$. En este caso el polinomio será de grado tres.

¹⁰ La constante de proporcionalidad depende del N_R y del diámetro, rugosidad y largo de la cañería.

2. Una compuerta cuadrada (L), articulada en un eje que pasa por **A**, permite el almacenamiento de un fluido en un depósito hasta una altura H . El piso del depósito es perfectamente horizontal hasta el punto **C**, donde describe un arco de circunferencia de radio L . Formando un ángulo θ ($0 \rightarrow 90^\circ$) se coloca un tope **B** que restringe el movimiento de la compuerta.

- ✓ Deducir una expresión para la fuerza en el tope (F_B), en función de la altura de líquido (h) y θ .
- ✓ Indicar el campo de validez de la expresión obtenida. Analizar situaciones particulares: $\theta=0$ y $\theta=90^\circ$.



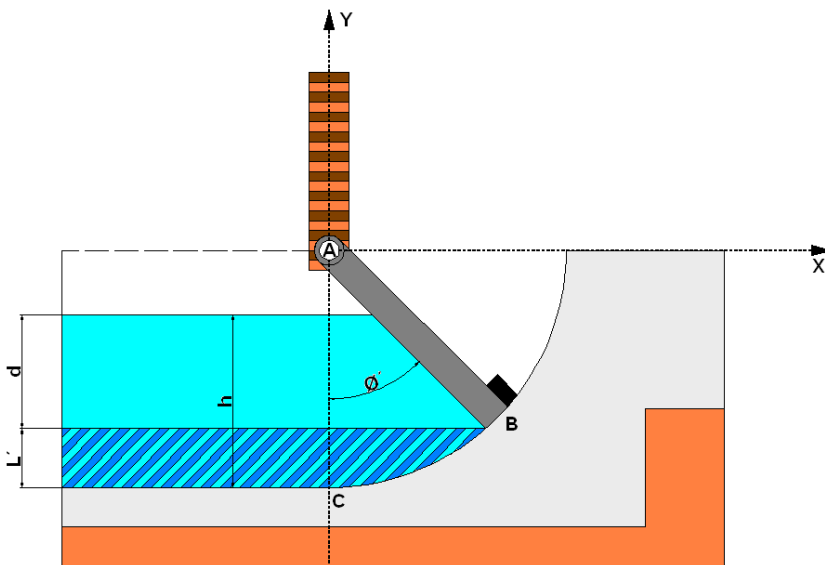
Definir y asumir conocidos todos los parámetros que necesite.

W: peso de la compuerta / **L**: lado de la compuerta / δ : densidad del fluido

En principio reconoceremos en esta problemática, la existencia de dos variables:

- La altura h de fluido que almacena el depósito. Esta varía entre cero y H .
- El ángulo θ que forma el tope **B**, (que frena a la compuerta) con la vertical que pasa por **A**. Este varía entre cero y noventa.

Una particularidad de esta compuerta, es que, cuando se comienza a agregar fluido al depósito, dependiendo del valor de θ , una parte de la altura del fluido h , no ejercerá presión sobre la compuerta, veamos esto gráficamente¹¹:



L' : parte de la altura h de fluido que no ejerce presión sobre la compuerta.

$$L' = L - L \cdot \cos\theta = L \cdot (1 - \cos\theta)$$

d : parte de la altura h de fluido que ejerce presión sobre la compuerta.

$$d = h - L' = h - L \cdot (1 - \cos\theta)$$

La altura de fluido h , para ejercer presión sobre la compuerta, estando ésta en contacto en **B** debe ser mayor a L' :

$$h > L \cdot (1 - \cos\theta)$$

Esta distancia d de fluido (una parte de h), es la que ejerce presión sobre la compuerta, cuando se encuentra en contacto con **B**. Cuando la compuerta está perfectamente vertical $\theta=0$, y solo en ese caso particular $L'=0$ y $d=h$. En todos los otros casos ($\theta \leq 90^\circ$) solo una parte de la altura de fluido ejercerá presión sobre la compuerta cuando se encuentra en contacto con el tope **B**.

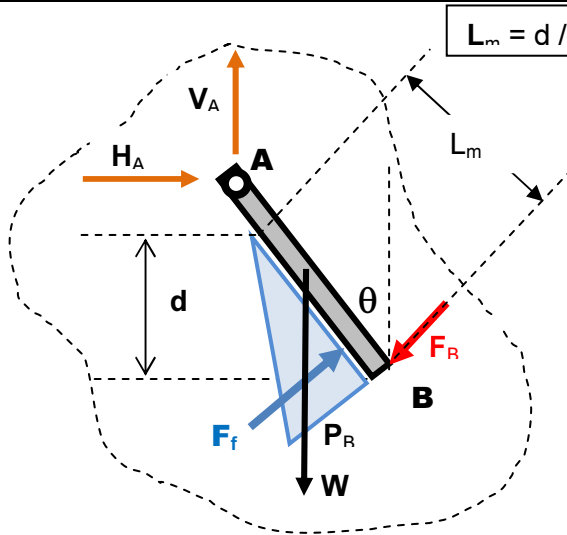
Aclarado esto, comenzamos analizando el equilibrio de la compuerta en un caso general, ($0 < \theta < 90^\circ$). Se visualizan dos situaciones distintas¹²:

- $L' \leq h \leq L$ el fluido interacciona con una parte de la superficie de la compuerta.
- $L \leq h \leq H$ el fluido interacciona con toda la superficie de la compuerta

¹¹ Este dibujo fue realizado por el estudiante Gabriel Goñi 2013.

¹² Cuando la altura de fluido este en el intervalo: $0 \leq h \leq L'$, no existirá contacto con el tope.

DCL1 → $L' \leq h \leq L$



Presión que ejerce el fluido en **B**

$$P_B = \delta \cdot g \cdot d = \delta \cdot g \cdot [h - L \cdot (1 - \cos\theta)]$$

El diagrama de presiones (volumen) puede reemplazarse por una fuerza concentrada aplicada en el baricentro del mismo con modulo igual al volumen de este: F_f .

H_A y V_A : reacciones en la articulación **A**

W : peso de la compuerta

F_B : Fuerza de contacto en **B**

Estamos asumiendo que:

- ✓ la articulación **A** es perfectamente lisa (torque de fricción despreciable)
- ✓ La fuerza de contacto en **B** es concentrada y perpendicular a la superficie de la compuerta con punto de aplicación en su extremo.

Como la compuerta está en equilibrio se debe cumplir que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum \vec{F}_{\text{externa}} = \vec{0} \\ \sum \vec{\tau}_{\text{externa}} = \vec{0} \end{array} \right.$$

Plantearemos la suma de torques con respecto al eje de giro de la compuerta **A**, dos fuerzas del diagrama de cuerpo libre no producen torque con respecto a este punto ya que sus rectas de acción pasa por **A**. Luego:

$$\sum \vec{\tau}_A = \vec{\tau}_{FB} + \vec{\tau}_W + \vec{\tau}_{Ff} = \vec{0} \quad (1)$$

donde:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_{FB} : \text{torque de la fuerza de contacto en } \mathbf{B}. \\ \tau_W : \text{torque del peso de la compuerta.} \\ \tau_{Ff} : \text{torque de la fuerza del fluido.} \end{array} \right.$$

En cuanto a los sentidos de los torques (signos), el torque de la fuerza de contacto en **B**, tiene igual sentido que el del peso **W** (horario), en cambio la fuerza debida al fluido ejerce un torque contrario (antihorario).

$$\tau_{FB} + \tau_W - \tau_{Ff} = 0 \quad \rightarrow \quad \tau_{FB} = \tau_{Ff} - \tau_W \quad (2)$$

Reemplazando en (2) los valores de los torques por el módulo de la fuerza multiplicada por su brazo de palanca (distancia entre la recta de acción de la fuerza y el punto A) y nos queda:

El módulo de la fuerza que ejerce la fuerza del fluido F_f , viene dado por el volumen del diagrama de presiones, en este caso un prisma triangular:

$$F_f = \frac{P_B \cdot L_m \cdot L}{2} = \frac{\delta \cdot g \cdot d^2 \cdot L}{2 \cdot \cos\theta}$$

Reemplazando la expresión de d, obtenemos:

$$F_f = \frac{\delta \cdot g \cdot L \cdot [h - L(1 - \cos \theta)]^2}{2 \cdot \cos \theta}$$

El brazo de palanca de esta fuerza con respecto a la articulación A, es: $L - L_m/3$

Luego el torque es:

$$\tau_{Ff} = \frac{\delta \cdot g \cdot L \cdot [h - L(1 - \cos \theta)]^2}{2 \cdot \cos \theta} \cdot \left[L - \frac{L_m}{3} \right] = \frac{\delta \cdot g \cdot L \cdot [h - L(1 - \cos \theta)]^2}{2 \cdot \cos \theta} \cdot \left[L - \frac{[h - L(1 - \cos \theta)]}{3 \cos \theta} \right]$$

Volviendo a (2) y reemplazando obtenemos:

$$\tau_{FB} = \frac{\delta \cdot g \cdot L \cdot [h - L(1 - \cos \theta)]^2}{2 \cdot \cos \theta} \cdot \left[L - \frac{[h - L(1 - \cos \theta)]}{3 \cos \theta} \right] - W \frac{L \cdot \sin \theta}{2}$$

Por lo que la fuerza de contacto en B, si $0 \leq \theta < 90^\circ$ y $L' \leq h \leq L$, seria:

$$F_B = \frac{\delta \cdot g \cdot [h - L(1 - \cos \theta)]^2}{2 \cdot \cos \theta} \cdot \left[L - \frac{[h - L(1 - \cos \theta)]}{3 \cos \theta} \right] - \frac{W \cdot \sin \theta}{2} \quad (*)$$

Notar que $F_B(h)$ es un polinomio de grado 3.

Existirá contacto cuando el valor de F_B sea positivo, de (*) esto será cuando:

$$\frac{\delta \cdot g \cdot [h - L(1 - \cos \theta)]^2}{2 \cdot \cos \theta} \cdot \left[L - \frac{[h - L(1 - \cos \theta)]}{3 \cos \theta} \right] \geq \frac{W \cdot \sin \theta}{2}$$

La expresión nos plantea que el peso de la compuerta W interviene, tanto en la existencia, como en el valor de la fuerza de contacto. Despejando de la igualdad h, encontraríamos la altura mínima de fluido que garantiza el contacto en **B**.

Caso Particular cuando $\theta = 0$

Si el tope **B** se coloca con $\theta=0$, la compuerta queda perfectamente vertical $\rightarrow (\cos \theta=1)$, $d=h$ y cualquier altura h, de fluido implicaría contacto en **B**.

En este caso, el peso de la compuerta no interviene en (*) ($\sin \theta=0$) y $L_m = h$. La expresión del torque neto con respecto a **A**, queda:

$$\tau_{FB} = \tau_{Ff}$$

$$F_f = \frac{P_B \cdot L_m \cdot L}{2} = \frac{\delta \cdot g \cdot h^2 \cdot L}{2}$$

$$\tau_{Ff} = \frac{\delta \cdot g \cdot L \cdot h^2}{2} \cdot \left(L - \frac{h}{3} \right)$$

Luego: $F_B = \frac{\delta \cdot g \cdot h^2}{2} \cdot \left[L - \frac{h}{3} \right]$ Notar que, matemáticamente, esta expresión es un caso particular de (*) con $\theta=0$.

Esta fuerza tendrá un máximo cuando $h=L$:

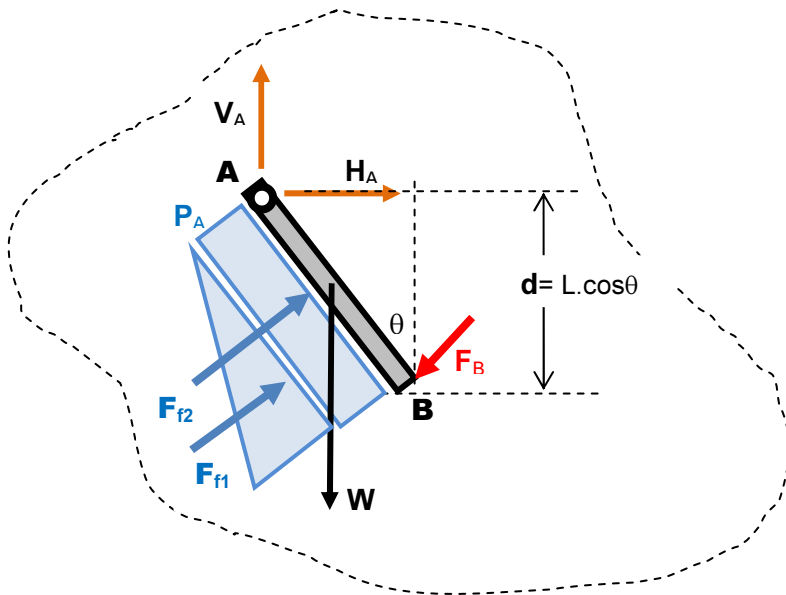
$$F_B|_{\max \theta=0} = \frac{\delta \cdot g \cdot [L]^2}{2} \cdot \left[L - \frac{[L]}{3} \right] = \frac{\delta \cdot g \cdot L^3}{3}$$

Volviendo a (*), en un caso cualquiera, a medida que aumenta θ :

- Aumenta L' , es decir, aumenta la parte de la altura de fluido h , que no ejerce presión sobre la compuerta.
- También, aumenta el torque del peso de la compuerta, pues aumenta el $\text{sen}\theta$ y consecuentemente disminuye la fuerza de contacto en el tope.

DCL 2 → $L \leq h \leq H$

Veamos ahora el caso en que la altura de fluido supera la altura de la compuerta, $h > L$



Presión que ejerce el fluido en:
A → $P_A = \delta \cdot g \cdot (h-L)$
B → $P_B = \delta \cdot g \cdot (h-L) + d$

HA y **VA**: reacciones en la articulación **A**
W: peso de la compuerta
FB: Fuerza de contacto en **B**

El diagrama de presiones tiene la forma de un prisma trapezoidal, y lo pensaremos como la suma de un prisma rectangular más uno triangular (ver figura).

- El **prisma triangular** es de volumen constante en todo este caso, es decir la fuerza F_{f1} , tendrá modulo y punto de aplicación constante mientras el fluido varíe su altura por encima de **A**.
- El **prisma rectangular** tendrá un lado variable a medida que aumente h , es decir que el módulo de F_{f2} es variable, pero su punto de aplicación permanece fijo, no depende de h , siempre caerá en el centro de la compuerta.

Una de las ecuaciones de equilibrio de la compuerta: torque con respecto al punto **A**, es:

$$\sum \vec{\tau}_A = \vec{\tau}_{FB} + \vec{\tau}_W + \vec{\tau}_{Ff1} + \vec{\tau}_{Ff2} = \vec{0} \quad (4)$$

donde:

- τ_{FB} : torque de la fuerza de contacto en **B**.
- τ_W : torque del peso de la compuerta.
- τ_{Ff1} : torque de la fuerza correspondiente a la parte **triangular** del diagrama de presiones
- τ_{Ff2} : torque de la fuerza correspondiente a la parte **rectangular** del diagrama de presiones

Los sentidos de los torques (signos), ya fueron analizados antes, luego la expresión escalar de (4), es:

$$\tau_{FB} + \tau_W - \tau_{Ff1} - \tau_{Ff2} = 0 \quad \rightarrow \quad \tau_{FB} = \tau_{Ff1} + \tau_{Ff2} - \tau_W \quad (5)$$

El módulo de la fuerza que ejerce la fuerza del fluido F_f , viene dado por el volumen del diagrama de presiones:

La parte triangular es constante tanto en modulo, dirección y punto de aplicación, su modulo es:

$$F_{f1} = \frac{(P_B - P_A).L.L}{2} = \frac{\delta.g.d.L^2}{2} = \frac{\delta.g.[L \cos \theta].L^2}{2} = \frac{\delta.g.L^3 . \cos \theta}{2}$$

La parte rectangular tiene modulo variable con h, pero su dirección y punto de aplicación es constante, su modulo es:

$$F_{f2} = P_A.L.L = \delta.g.(h - L).L^2$$

Multiplicando cada fuerza por su brazo de palanca con respecto a la articulación A, se obtiene:

$$\tau_{FF1} = \frac{\delta.g.L^3 . \cos \theta}{2} \cdot \frac{2L}{3} = \frac{\delta.g.L^4 . \cos \theta}{3}$$

$$\tau_{FF2} = \frac{\delta.g.(h - L).L^2 . L}{2} = \frac{\delta.g.(h - L).L^3}{2}$$

Volviendo a (5) y reemplazando obtenemos:

$$\tau_{FB} = \frac{\delta.g.L^4 . \cos \theta}{3} + \frac{\delta.g.(h - L).L^3}{2} - W \frac{L . \text{sen} \theta}{2}$$

Por lo que la fuerza de contacto en B, si $0 < \theta < 90^\circ$ y $L \leq h \leq H$, seria:

$$F_B = \frac{\delta.g.L^3 . \cos \theta}{3} + \frac{\delta.g.(h - L).L^2}{2} - \frac{W . \text{sen} \theta}{2} \quad (**)$$

En este caso, la relación entre la fuerza de contacto (F_B) y la altura de fluido (h) es lineal.

Igual que en el caso anterior, existirá contacto cuando el valor de F_B sea positivo, de (**) esto será cuando:

$$\frac{\delta.g.L^3 . \cos \theta}{3} + \frac{\delta.g.(h - L).L^2}{2} \geq \frac{W . \text{sen} \theta}{2}$$

Caso Particular cuando $h=L$

Para verificar, si $h=L$ las dos expresiones (*) y (**) deberían coincidir, vemos:

De (**) se obtiene $\rightarrow F_B = \frac{\delta.g.L^3 . \cos \theta}{3} - \frac{W . \text{sen} \theta}{2}$

Y de (*) se obtiene $\rightarrow F_B = \frac{\delta.g.[L - L(1 - \cos \theta)]^2}{2 . \cos \theta} \cdot \left[L - \frac{[L - L(1 - \cos \theta)]}{3 \cos \theta} \right] - \frac{W . \text{sen} \theta}{2}$

$$F_B = \frac{\delta.g.L^2 [1 - (1 - \cos \theta)]^2}{2 . \cos \theta} \cdot \left[L - \frac{L [1 - (1 - \cos \theta)]}{3 \cos \theta} \right] - \frac{W . \text{sen} \theta}{2}$$

$$F_B = \frac{\delta.g.L^2 [\cos \theta]^2}{2 . \cos \theta} \cdot \left[L - \frac{L [\cos \theta]}{3 \cos \theta} \right] - \frac{W . \text{sen} \theta}{2}$$

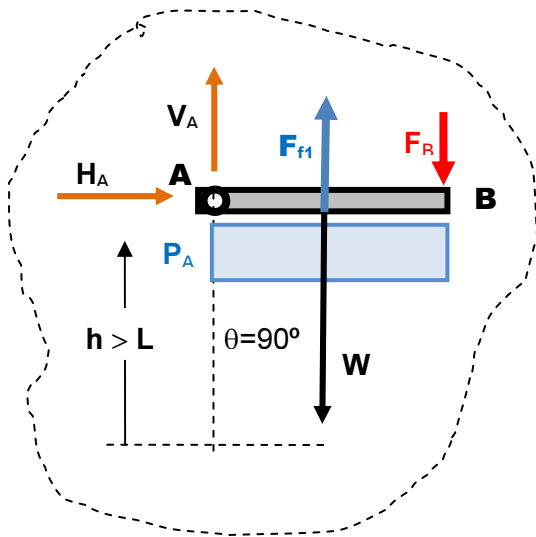
$$F_B = \frac{\delta.g.L^2 [\cos \theta]}{2} \cdot \left[\frac{2L}{3} \right] - \frac{W . \text{sen} \theta}{2} \rightarrow F_B = \frac{\delta.g.L^3 . \cos \theta}{3} - \frac{W . \text{sen} \theta}{2}$$

De esta manera, verificamos que las soluciones son las mismas cuando $h=L$.

DCL 3 ($\theta=90^\circ$) solo valido para $L < h \leq H$

Otro caso particular extremo, se da cuando el tope de la compuerta **B** está formando un ángulo de 90° con la vertical que pasa por **A**. **En este caso no podemos utilizar la expresión** (*), porque h tiene que ser mayor o igual que L . Si no, no llegaría el agua hasta la altura del tope.

El diagrama de presiones sobre la compuerta será un prisma rectangular.



$$P_A = \delta \cdot g \cdot (h - L)$$

$$F_{f1} = P_A \cdot L^2 = \delta \cdot g \cdot (h - L) L^2$$

Planteamos (1), para este caso:

$$\sum \vec{\tau}_A = \vec{\tau}_{F_B} + \vec{\tau}_W + \vec{\tau}_{F_f} = \vec{0}$$

$$F_B = \frac{\delta \cdot g \cdot [h - L] L^2}{2} - \frac{W}{2}$$

Notar que, matemáticamente, esta expresión es un caso particular de (**), con $\theta=90^\circ$

Existirá contacto cuando el valor de F_B sea positivo, esto es cuando:

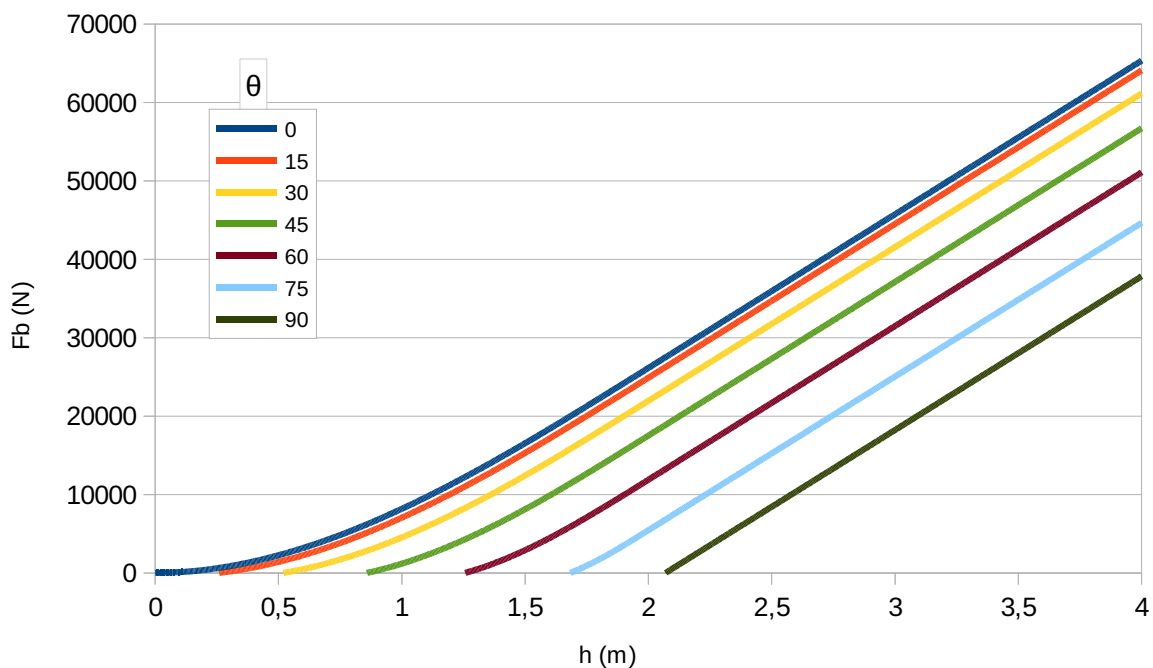
$$\frac{\delta \cdot g \cdot [h - L] L^2}{2} \geq \frac{W}{2} \quad (***)$$

En este caso, será necesaria una altura de fluido mayor a la altura de la compuerta ($h > L$) para que esta pueda hacer tope en **B**. Esta altura de fluido, debe simultáneamente estar por encima de **A** y además generar una presión en la articulación **A**, tal que el torque de F_{f1} sea mayor al torque del peso, despejando de (***) se obtiene:

$$h \geq \frac{W}{\delta \cdot g \cdot L^2} + L$$

En esta expresión se visualizan los dos términos mencionados anteriormente.

Resumen gráfico

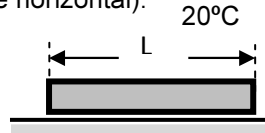


El gráfico muestra F_b en función de h para distintos ángulos θ . Como ejemplo se usó $L=2\text{m}$, y una compuerta de acero de 1 cm de espesor, que pesa casi 300 Kg.

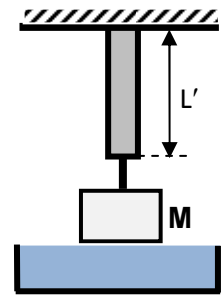
Se pueden observar varias cosas que confirman lo que vimos en las ecuaciones:

- Para cada ángulo θ hay un h mínimo (cuando $F_b=0$). Si h es menor que ese valor, la compuerta no llega a tocar el tope. Este crece con θ porque depende de $W \sin \theta$, o sea, cuanto más levantada está la compuerta, más fuerza hace falta para sostenerla porque W hace más palanca.
- Como vimos, si $h < L$ la ecuación es cúbica, y si $h > L$ es lineal. Esto se ve bien en el gráfico. Cuando h sobrepasa los 2m se vuelve lineal. En algunos ángulos no hay contacto si $h < L$, entonces es siempre lineal.
- La pendiente de la parte lineal es igual en todos los θ , porque sólo depende de la densidad, g y el área de la compuerta.

3. Una barra tiene una densidad δ_b , sección transversal A , modulo de Young E y largo L (valores estos tomados a 20°C con la barra apoyada sobre una superficie horizontal).



Se empotra la barra a un techo, con un bloque de masa M y sección transversal S colgado en su extremo (figura). En estas condiciones (20°C y colgado), el bloque queda justo sobre la superficie de un líquido de densidad δ_L . Encontrar una expresión que permita calcular:



- ✓ Los esfuerzos internos de la barra y la longitud L' a 20°C .
- ✓ Los esfuerzos internos de la barra cuando se varía uniformemente su temperatura.

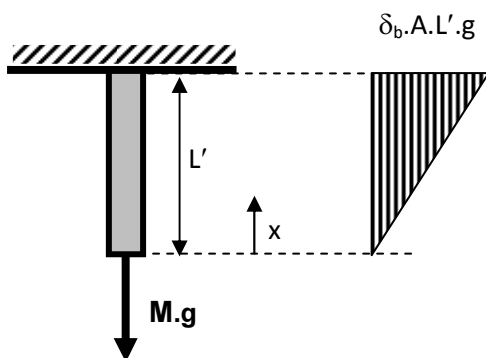
Para calcular los esfuerzos internos de la barra necesitamos las fuerzas externas que la solicitan. En este caso sobre la barra actúan:

- Su peso $W = m \cdot g = \delta_b \cdot V \cdot g \rightarrow W_b = \delta_b \cdot A \cdot L \cdot g$
- El peso del bloque suspendido de la barra $\rightarrow W_B = M \cdot g$
- Las reacciones de vínculo en el empotramiento.

La barra se encuentra en equilibrio, lo que significa que la fuerza del empotramiento anula las dos primeras.

En todas las secciones transversales (perpendiculares al eje) de la barra habrá solo esfuerzo normal σ . El esfuerzo tangencial, corte, es nulo pues no hay componente de las fuerzas en dirección paralela a cualquier sección transversal.

Ahora bien, mientras la fuerza que ejerce el bloque de masa M se la puede considerar como concentrada en la sección más baja de la barra y que la soportan con igual intensidad todas las otras secciones, el peso de la barra es una fuerza distribuida, las secciones más cercanas al empotramiento soportan mayor parte del peso que las del extremo donde está empotrado el bloque. Podríamos ver esto gráficamente:



El peso de la barra está distribuido linealmente a lo largo L' . El gráfico muestra un diagrama de distribución tomando la variable x , para señalar una sección cualquiera de la barra. Luego, el peso de la barra viene dado por:

$$W_{bx} = \delta_b \cdot g \cdot A \cdot x \quad \text{con } 0 \leq x \leq L'$$

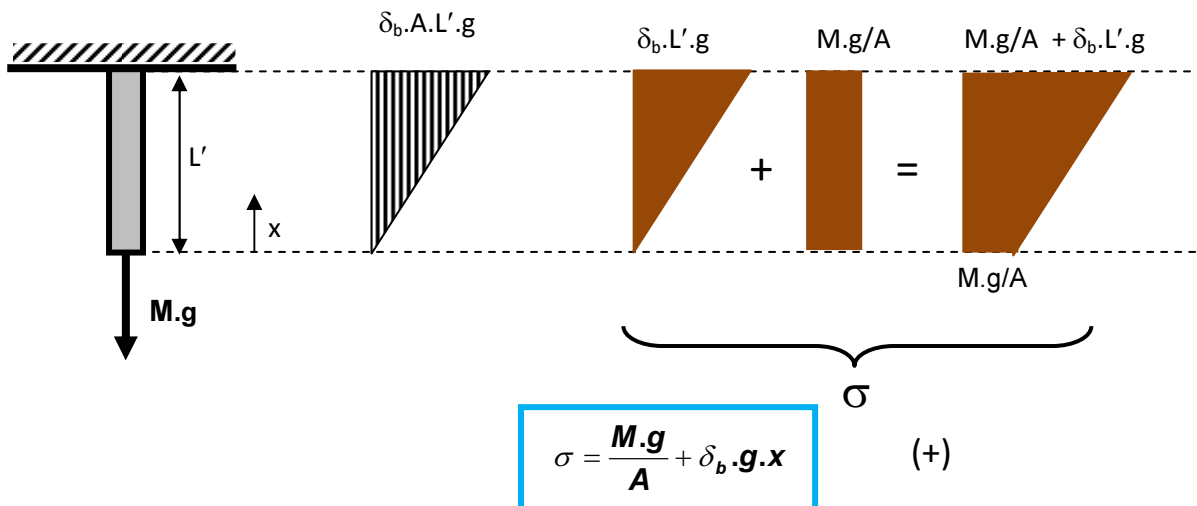
Es decir, distintas secciones de la barra, tendrán distinto esfuerzo interno debido a su peso propio. Como la sección transversal de la barra A es constante, los esfuerzos internos normales (σ) de la barra tendrán igual distribución que la de su peso propio (lineal). La ecuación del esfuerzo normal de cada sección de la barra debido a su peso propio está dada por:

$$\sigma_w = \frac{W_{bx}}{A} = \frac{\delta_b \cdot g \cdot A \cdot x}{A} = \delta_b \cdot g \cdot x$$

En cuanto a la fuerza que ejerce el bloque, al estar concentrada en la sección más baja ($x=0$), todas las secciones de la barra, debido a esta fuerza, tendrán igual esfuerzo interno normal:

$$\sigma_M = \frac{M \cdot g}{A}$$

Superponiendo efectos tenemos:

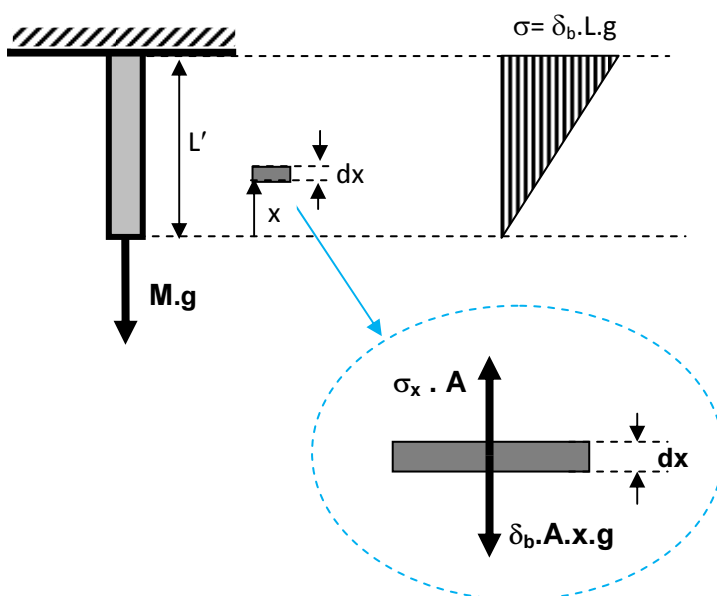


Para calcular la variación de longitud de la barra, asumiremos que el material de la misma responde a la ley de Hooke y que estamos dentro de su campo de validez ($\varepsilon < 0,2\%$).

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \rightarrow \frac{F}{A} = E \cdot \frac{\Delta L}{L_0}$$

Luego las deformaciones mecánicas responderán a la siguiente expresión: $\Delta L^{mecanico} = \frac{F \cdot L}{A \cdot E}$ (1)

Las deformaciones **son localizadas**, esto significa que la deformación que experimenta la barra es la sumatoria de las deformaciones de cada una de las secciones que la componen. En el caso en estudio, tenemos dos tipos de fuerzas que intervienen en la deformación: una concentrada y la otra distribuida linealmente.



Para estudiar la deformación de la barra debida a la fuerza distribuida linealmente, tomamos un diferencial de barra de largo dx (figura), el cual se encuentra en equilibrio de deformación.

Este elemento está accionado por dos fuerzas equilibradas, una correspondiente al peso de la barra que hay por debajo de la misma y la otra resultado del esfuerzo interno normal del material de la barra. Igualando estas fuerzas obtenemos:

$$\sigma_x = \delta_b \cdot g \cdot x$$

Utilizamos (1) para obtener la deformación del elemento diferencial de la barra y luego integramos este valor entre cero y el largo de la barra L para obtener la deformación total:

$$\Delta L^{\text{mecanico}} = \frac{\sigma \cdot L}{E} \quad \rightarrow \quad \Delta(dx) = \frac{\delta_b \cdot g \cdot x \cdot dx}{E} \quad \left\{ \begin{array}{l} L = dx \\ \sigma_x = \delta_b \cdot g \cdot x \end{array} \right.$$

Integrando obtenemos: $\Delta L_1 = \int_0^L \frac{\delta_b \cdot g \cdot x \cdot dx}{E} = \frac{\delta_b \cdot g \cdot L^2}{2E}$ (2)

Para evaluar las deformaciones que produce el bloque colgado de la barra es más sencillo, ya que esta fuerza se distribuye de igual manera en todas las secciones. Aplicando (1)

$$\Delta L_2 = \frac{F \cdot L}{A \cdot E} = \frac{M \cdot g \cdot L}{A \cdot E}$$
 (3)

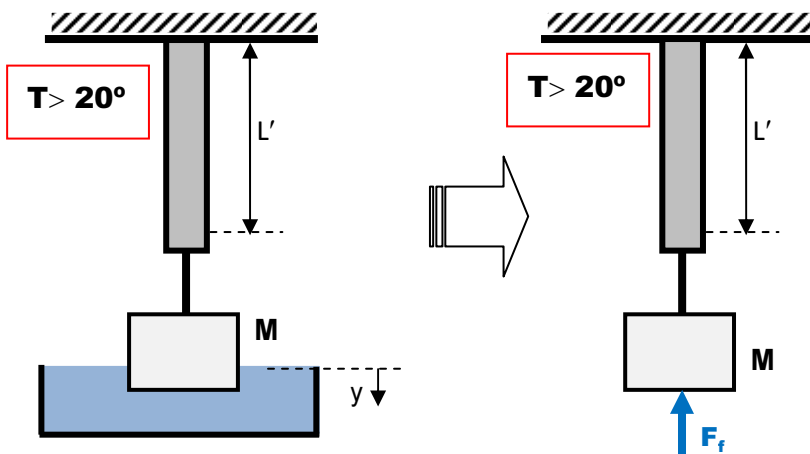
Superponiendo efecto tenemos:

$$\Delta L = \frac{\delta_b \cdot g \cdot L^2}{2E} + \frac{M \cdot g \cdot L}{A \cdot E}$$

Luego $L' = L + \Delta L$

Buscamos ahora los esfuerzos internos de la barra cuando se modifica su temperatura de manera uniforme.

Al variar la temperatura de la barra, esta experimentara un cambio de volumen. No existen restricciones transversales a su eje, luego podemos tomar solo deformaciones lineales (a lo largo del eje). Como el bloque que cuelga de la barra esta justo sobre un fluido, si aumenta la longitud de la barra el bloque interaccionara con el fluido. El bloque se introduce dentro del fluido desalojando parte del mismo. Aquí aparece, actuando sobre la barra, la fuerza que ejerce el fluido sobre el bloque (empuje estático).

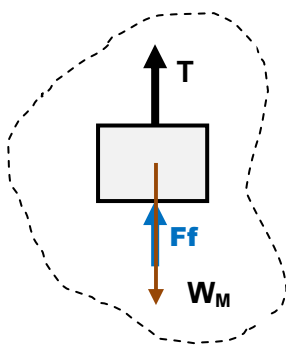


Definiendo una referencia **y** sobre la superficie del líquido, el módulo del empuje será:

$$F_f = \delta_L \cdot g \cdot S \cdot y$$
 (4)

Se trata de una fuerza variable aplicada sobre el bloque, aumentado su valor a medida que este se introduce en el líquido, a consecuencia de que la barra se deforma térmicamente.

El diagrama de cuerpo libre del bloque muestra que el empuje se transmite a la barra mediante la conexión bloque/barra, **T**.



$$\sum \vec{F} = \vec{0} \quad \rightarrow \quad T = W_M - F_f$$

Este valor de tensión puede ser positivo, negativo o nulo, dependiendo de la densidad del bloque, y cuán sumergido está. Si el cuerpo no flota, T siempre será positiva. Si el cuerpo flota, en algún instante puede ser cero y luego pasar a ser negativa.

Si la conexión bloque/barra es mediante una soga, solo serán factibles los valores positivos de **T** (la soga no admite esfuerzo de compresión). En el caso de una conexión mediante otra barra se admitirán también los esfuerzos de compresión (**T**<0).

Asumimos en principio que el vínculo, barra/bloque, es mediante una barra rígida de longitud despreciable¹³.

En síntesis, sobre la deformación de la barra, podríamos decir que mientras se le varía la temperatura aparece una fuerza que la comprime. **La barra se deforma de manera restringida**, el líquido funciona como un vínculo que le impide la libre deformación.

La deformación efectiva (neta) que experimenta la barra¹⁴ viene dada por la distancia y que se introduce el cuerpo en el recipiente. Podemos escribir esto mediante la siguiente expresión:

$$\underbrace{\Delta L^{\text{neto}} |_{\text{barra}}}_{\Delta L^{\text{Termica}} |_{\text{barra}} - \Delta L^{\text{Mecanica}} |_{\text{barra}}} = y \quad (5)$$

Donde el signo menos hace referencia, a que la fuerza que ejerce el fluido comprime a la barra.

$$\begin{cases} \Delta L^{\text{Termica}} = \alpha \cdot L_0 \cdot \Delta T \\ \Delta L^{\text{Mecanica}} = \frac{F \cdot L}{A \cdot E} = \frac{F_f \cdot L}{A \cdot E} \end{cases}$$

Reemplazando en (5), $\alpha \cdot L \cdot \Delta T - \frac{F_f \cdot L}{A \cdot E} = y$

De (4) $y = \frac{F_f}{\delta_f \cdot g \cdot S} \rightarrow \alpha \cdot L \cdot \Delta T - \frac{F_f \cdot L}{A \cdot E} = \frac{F_f}{\delta_f \cdot g \cdot S}$

$$F_f = \frac{\alpha \cdot L \cdot \Delta T}{\left(\frac{L}{A \cdot E} + \frac{1}{\delta_f \cdot g \cdot S} \right)}$$

$\sigma_T = \frac{F_f}{A} \rightarrow$ Esfuerzo interno normal sobre la barra "debido a la variación de temperatura"¹⁵.

$$\sigma_T = \frac{\alpha \cdot L \cdot \Delta T}{\left(\frac{L}{E} + \frac{A}{\delta_f \cdot g \cdot S} \right)} \quad (++)$$

Esfuerzo de compresión, que se agrega a la tracción original debida al peso propio de la barra y la fuerza que ejerce el bloque colgado (+). Luego la tensión neta sobre la barra en función de la temperatura queda:

¹³ No conductora del calor (asilante)

¹⁴ En adelante vamos a hablar de la deformación a partir del estado anterior en que se encontraba ya colgada, a 20°, y ya deformada, con longitud L'. Los esfuerzos que vamos a encontrar son esfuerzos "parciales" a los que hay que sumar los anteriores al proceso de variación de T.

¹⁵ Se le llama "fuerza térmica" pero no es debida a la variación de T sino a que la variación de T provoca una deformación, que altera una fuerza externa, en este caso, el empuje.

$$\sigma_{\text{neto}} = \delta_b \cdot \mathbf{g} \cdot \mathbf{x} - \frac{\alpha \cdot \mathbf{L} \cdot \Delta \mathbf{T}}{\left(\frac{\mathbf{L}}{\mathbf{E}} + \frac{\mathbf{A}}{\delta_f \cdot \mathbf{g} \cdot \mathbf{S}} \right)} + \frac{\mathbf{M} \cdot \mathbf{g}}{\mathbf{A}}$$

Un valor positivo indica barra traccionada y uno negativo barra comprimida.

Si el vínculo entre el bloque y la barra fuera una soga que no admite compresión, habría que chequear que la suma de los dos últimos términos, que es el esfuerzo que le es transmitido a la barra por el bloque, sea positiva.