Álgebra 27 - 2024 1C - 2do parcial (Tema 1)

1 Ejercicio 1

Sean $\mathbb{H}_1 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0\}$, $\mathbb{H}_2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_3 = 0\}$ y $\mathbb{S} = \langle (0,1,1,2),(1,1,1,0)\rangle$. Hallar, si es posible, un proyector $p : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ que cumpla $\mathrm{Nu}(p) = \mathbb{S}$ y $p(\mathbb{H}_1) \subset \mathbb{H}_2$.

Un genérico de $\mathbb{S}$ es

$$s = \alpha(0,1,1,2) + \beta(1,1,1,0) = (\beta, \alpha+\beta, \alpha+\beta, 2\alpha) \ \in \ \mathbb{S}$$

La intersección $\mathbb{S} \cap \mathbb{H}_1$ es

$$s \in \mathbb{H}_1 \ \Rightarrow \ \beta - (\alpha+\beta) + (\alpha+\beta) - 2\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad \beta = 2\alpha$$
$$\mathbb{S} \cap \mathbb{H}_1 = \langle (2,3,3,2)\rangle$$

La intersección $\mathbb{H}_1 \cap \mathbb{H}_2$ es

$$\mathbb{H}_1 \cap \mathbb{H}_2 = \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$$
$$\mathbb{H}_1 \cap \mathbb{H}_2 = \langle (1,0,-1,0),(0,1,0,-1)\rangle$$

Defino p sobre bases $B_{\mathbb{S}} = \{(0,1,1,2),(2,3,3,2)\}$ y $B_{\mathbb{H}_1} = \{(2,3,3,2),(1,0,-1,0),(0,1,0,-1)\}$ de $\mathbb{S}$ y $\mathbb{H}_1$

i) $p(0,1,1,2) = (0,0,0,0)$

ii) $p(2,3,3,2) = (0,0,0,0)$

iii) $p(1,0,-1,0) = (1,0,-1,0)$

iv) $p(0,1,0,-1) = (0,1,0,-1)$

Justifico verificando explícitamente que mi *ansatz* cumpla todas las condiciones:

- Por i) y ii), claramente $\mathbb{S} \subseteq \mathrm{Nu}(p)$. Además $\dim\big(\mathrm{Im}(p)\big) = 2 \ \Rightarrow \ \dim\big(\mathrm{Nu}(p)\big) = 2 \ \Rightarrow \ \mathbb{S} = \mathrm{Nu}(p)$.
- Por ii), iii) y iv), claramente $p(\mathbb{H}_1) \subset \mathbb{H}_2$ *(notar que* $\dim\big(p(\mathbb{H}_1)\big) = 2 < 3$*, por lo que* $p(\mathbb{H}_1) \neq \mathbb{H}_2$ *y la inclusión es estricta, como se pide).*
- i)-iv) verifican inmediatamente que $p \circ p = p$ (es decir, p es proyector).

2 Ejercicio 2

Sean $B = \{(-1,2,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$ base de $\mathbb{R}^3$ y $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal tal que $M_{BE}(f) = \begin{pmatrix} a & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Hallar $a \in \mathbb{R}$ tal que $f(1,2,-1) = (1,3,2)$ y, para el valor de a hallado, encontrar todos los vectores $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ tales que $f(\mathbf{v}) = (1,3,2)$.

Las coordenadas $(1,2,-1)_B = (x_1, x_2, x_3)$ están dadas por

$$(1,2,-1) = x_1(-1,2,1) + x_2(1,1,0) + x_3(1,0,0)$$

De aquí, $(1,2,-1)_B = (-1,4,-4)$. Luego $M_{BE}(f).(1,2,-1)_B = f(1,2,-1)$

$$\begin{pmatrix} a & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad a = 3\,.$$

Ahora busco $(\mathbf{v})_B = (x_1, x_2, x_3)$ genérico

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \to \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & | & 1 \\ 1 & 2 & 1 & | & 3 \\ 2 & 2 & 1 & | & 2 \end{pmatrix} \quad \to \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & | & -2 \\ 1 & 2 & 1 & | & 3 \\ 1 & 0 & 0 & | & -1 \end{pmatrix} \quad \to \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 1 & 2 & 1 & | & 3 \\ 1 & 0 & 0 & | & -1 \end{pmatrix}$$

$$(\mathbf{v})_B = (-1, \lambda, 4 - 2\lambda)$$

A partir de las coordenadas $(\mathbf{v})_B$, calculo el vector $\mathbf{v}$ pedido

$$\mathbf{v} = -1(-1,2,1) + \lambda(1,1,0) + (4-2\lambda)(1,0,0)$$
$$\mathbf{v} = \lambda(-1,,1,0) + (5,0,-1) = (-\lambda + 5, \lambda - 2, -1)$$

3 Ejercicio 3

Hallar un polinomio $P \in \mathbb{R}[x]$ de grado mínimo que tenga como raíces a todas las soluciones de la ecuación $iz^2 + \bar{z} = \text{Re}(z)^2(1+i)$ y cumpla que $P(2) = 60$.

La ecuación involucra la parte real de z, hay términos sumados y no hay más que términos de orden 2 en la incógnita. Entonces conviene usar la forma binómica $z = a + bi$ con $a, b \in \mathbb{R}$

$$\begin{gathered} i(a+bi)^2 + (a+bi)^* = a^2(1+i) \\ -2ab + (a^2 - b^2)i + a - bi = a^2 + a^2 i \\ -2ab + a + (a^2 - b^2 - b)i = a^2 + a^2 i \end{gathered}$$

Igualando las partes real e imaginaria

$$\begin{cases} -2ab + a = a^2 \\ a^2 - b^2 - b = a^2 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} a(a + 2b - 1) = 0 \\ b(b+1) = 0 \end{cases}$$

De la segunda ecuación, $b = 0$ o $b = -1$.

- Si $b = 0$, la primera ecuación es $a(a-1) = 0 \Rightarrow a = 0$ o $a = 1$
- Si $b = -1$, la primera ecuación es $a(a-3) = 0 \Rightarrow a = 0$ o $a = 3$

Por ende, todas las soluciones de la ecuación son $z = 0$, $z = 1$, $z = -i$, $z = 3 - i$. Además, P tiene coeficientes reales, por lo que $z = i$, $z = 3 + i$ también deben ser raíces de P. Entonces un polinomio P de grado mínimo que contiene todas esas raíces es

$$\begin{aligned} P(z) &= az(z-1)(z+i)(z-i)(z-3+i)(z-3-i) \\ P(z) &= az(z-1)(z^2+1)(z^2-6z+10) \end{aligned}$$

Luego

$$P(2) = a.2.1.5.2 = 60 \Rightarrow a = 3$$

El polinomio es

$$P(z) = 3z(z-1)(z^2+1)(z^2-6z+10)$$

4 Ejercicio 4

Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal $f(x_1, x_2, x_3) = (-2x_1, -3x_1 + x_2 - 6x_3, -2x_3)$. Hallar, si existe, una base B de $\mathbb{R}^3$ tal que $M_B(f)$ sea diagonal.

La matriz de la transformación es

$$M(f) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Su polinomio característico es

$$P(\lambda) = (-2 - \lambda)(1 - \lambda)(-2 - \lambda) = -(\lambda + 2)^2(\lambda - 1)$$

Sus autovalores son $\lambda = -2$ (con multiplicidad algebraica 2) y $\lambda = 1$.

El subespacio asociado a $\lambda = -2$ está dado por $\big(M(f) - (-2)I\big)v = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ -3 & 3 & -6 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbb{S}_{-2} = \langle (1, 1, 0)\,,\,(0, 2, 1) \rangle$$

El subespacio asociado a $\lambda = 1$ está dado por $\big(M(f) - 1I\big)v = 0$

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & | & 0 \\ -3 & 0 & -6 & | & 0 \\ 0 & 0 & -3 & | & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbb{S}_1 = \langle (0, 1, 0) \rangle$$

f tiene tres autovectores linealmente independientes, por lo cual existe una base B de autovectores en donde $M_B(f)$ será diagonal

$$B = \{(1, 1, 0), (0, 2, 1), (0, 1, 0)\}.$$