B **ANÁLISIS (ING. Y EX.) (66)** **1er PARCIAL 1er CUATRIMESTRE DE 2024** Tema 3

APELLIDO .... **NOMBRES** .... **DNI**

1	2	3	4	NOTA
B	B	B	B	10 (diez)

INSCRIPTO EN:

SEDE: TIORE	DÍAS: LU-MI-VI
HORARIO: 10-13	AULA:

Duración: 2:30 hs.

Los razonamientos usados para la resolución de los problemas deben figurar en la hoja.

1.- Calcular $\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt[n]{2^n+5^n}\right)\left(\frac{2n+3}{2n+9}\right)^n$.

2.- Dada $f:\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$, $f(x)=3+\frac{\operatorname{sen} x}{2-\sqrt{2}\cos x}$, hallar el punto del gráfico de f tal que la recta tangente en dicho punto es paralela a la recta de ecuación $y=3$.

3.- Se define $f:\left[-\frac{1}{3},+\infty\right)\to\mathbb{R}$ por $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{ax}-a\ln(x+1)-1}{\sqrt{3x+1}-1} & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$.

Hallar todos los valores de $a\in\mathbb{R}$ tales que $f'(0)=10$.

4.- Sea $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=2\sqrt{x+15}-2\ln(x)$. Hallar la imagen de f.

(1) $\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt[n]{2^n+5^n}\right)\left(\frac{2n+3}{2n+9}\right)^n$

Evalúo el comportamiento de los factores por separado

$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2^n+5^n}$

$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{5^n\left(1+\frac{2^n}{5^n}\right)}$

$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{5^n}\,\sqrt[n]{1+\frac{2^n}{5^n}}$

$\lim_{n\to+\infty} 5\,\sqrt[n]{1+\left(\frac{2^n}{5^n}\right)}$

Utilizo D'Alambert

$\lim_{n\to\infty} \dfrac{\frac{2^{n+1}}{5^{n+1}}}{\frac{2^n}{5^n}}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}\cdot 5^n}{5^{n+1}\cdot 2^n}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{2^n}\cdot 2\cdot \cancel{5^n}}{\cancel{5^n}\cdot 5\cdot \cancel{2^n}} = 2/5$

Según D'Alambert como $2/5 < 1$ da 0

$= 5\sqrt[n]{1} = \boxed{5}$

$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2n+3}{2n+9}\right)^\infty$

Evalúo para ver qué da

$\lim_{n\to+\infty} \frac{2n+3}{2n+9}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}\left(2+\frac{3}{n}\right)}{\cancel{n}\left(2+\frac{9}{n}\right)} = \frac{2}{2} = 1$

$\frac{3}{n} \to 0$, $\frac{9}{n} \to 0$

Indeterminación 1^∞

$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{2n+3}{2n+9}-1\right)^n$

$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{2n+3}{2n+9}-\frac{2n+9}{2n+9}\right)^n$

$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{2n+3-2n-9}{2n+9}\right)^n$

$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{-6}{2n+9}\right)^n$

$$\lim_{n \to +\infty} \underbrace{\left[\left(1 + \frac{-6}{2n+9}\right)^{\frac{2n+9}{-6}}\right]}_{\text{tiende a } e}{}^{\frac{-6}{2n+9} \cdot n}$$

$\frac{-6}{2n+9} \cdot n \to$ CA

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{-6}{2n+1} \cdot n$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{-6n}{2n+9}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n(-6)}{n\left(2+\frac{9}{n}\right)}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{-6}{2+\underbrace{\frac{9}{n}}_{\to 0}} = -3$$

el límite original es e^{-3}

Por ende,

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\sqrt[n]{2^n + 5^n}\right)\left(\frac{2n+3}{2n+9}\right)^n = \boxed{5e^{-3}}$$

(2) $F(x) = 3 + \frac{\sqrt{2}\ \operatorname{sen} x}{2 - \sqrt{2}\cos x}$ Hallar Rec Tg /

$m =$ paralela a $y = 3$

$y = 3$ tiene $m = 0$

Para que las rectas sean paralelas deben tener igual pendiente. La derivada de F en ese punto en x_0 debe ser igual a 0

$$F'(x) = \frac{\cos(x).(2-\sqrt{2}\cos(x)) - [\operatorname{sen}(x).(\sqrt{2}\operatorname{sen} x)]}{(2-\sqrt{2}\cos(x))^2}$$

$F'(x) = 0$

$$\cos x.(2-\sqrt{2}\cos x) - \operatorname{sen}(x).\sqrt{2}\operatorname{sen} x) = 0$$

$$\cos x(2-\sqrt{2}\cos x) = \operatorname{sen} x.(\sqrt{2}.\operatorname{sen} x)$$

$$2\cos x - \sqrt{2}\cos^2 x = \sqrt{2}\operatorname{sen}^2 x$$

$$2\cos x = \sqrt{2}\operatorname{sen}^2 x + \sqrt{2}\cos^2 x$$

$$2\cos x = \sqrt{2}\underbrace{(\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x)}_{\text{Por propiedad trigonom da } 1}$$

$$2\cos x = \sqrt{2}.1 \rightarrow x = \pi/4$$

$$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x = 45°$$

Punto $(x; y)$

$$\left(\cancel{45}\ \pi/4 ; \frac{6+\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$F(45) = 3 + \frac{\operatorname{sen} 45}{2-\sqrt{2}\cos 45} = \frac{6+\sqrt{2}}{2}$$

En el punto del grafico $\left(45; \frac{6+\sqrt{2}}{2}\right)$ de F, su recta tangente ~~tiene~~ es paralela a $y = 3$

EJ 3

$$F(x) \begin{cases} \dfrac{e^{ax} - a\ln(x+1) - 1}{\sqrt{3x+1} - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$a \in \mathbb{R} \; / \; F'(0) = 10$

Para que F sea derivable, primero debe ser continua.

Evalúo continuidad en $x_0 = 0$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{ax} - a\ln(x+1) - 1}{\sqrt{3x+1} - 1} \quad \text{"}\frac{0}{0}\text{" IND}$$

L'H =

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{ax}\cdot a - a\cdot\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{2\sqrt{3x+1}}\cdot 3} = \frac{a-a}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 0$$

Como $F(0) = 0$ y $\lim_{x\to 0} F(x) = 0$ F es continua. Evalúo derivabilidad

$\exists\, F'(0)$ si $\exists \lim_{h\to 0} \frac{F(0+h) - F(0)}{h}$

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(h)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0} \left(\frac{e^{ah} - a\ln(h+1) - 1}{\sqrt{3h+1} - 1}\right)\cdot\frac{1}{h}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^{ah} - a\ln(h+1) - 1}{(\sqrt{3h+1} - 1)\cdot h} \quad \text{"}\frac{0}{0}\text{" IND}$$

L'H

$= \longrightarrow$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{ah}\cdot a - a\cdot\frac{1}{h+1}}{\frac{1}{2\sqrt{3h+1}}\cdot 3\cdot h + \sqrt{3h+1} - 1}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{ah}\cdot a - \frac{a}{h+1}}{\frac{3h}{2\sqrt{3h+1}} + \sqrt{3h+1} - 1}$$

$\frac{a-a}{0} = 0$

$= \text{NO}$

$\text{L'H} =$

$\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{ah}\cdot a^2 + \frac{a}{(h+1)^2}}{\frac{3\cdot 2\sqrt{3h+1} - 3h\cdot 2\frac{1}{2\sqrt{3h+1}}\cdot 3}{\left(2\sqrt{3h+1}\right)^2} + \frac{1}{2\sqrt{3h+1}}\cdot 3}$$

$$\lim_{x\to 0} = \frac{e^{ah}\cdot a^2 + \frac{a}{(h+1)^2}}{\left(\frac{6\sqrt{3h+1} - \frac{18h}{2\sqrt{3h+1}}}{\left(2\sqrt{3h+1}\right)^2}\right) + \frac{3}{2\sqrt{3h+1}}}$$

$$\frac{a^2+a}{\frac{6}{4}+\frac{3}{2}}$$

$$\boxed{\frac{a^2+a}{3}} \qquad \frac{a^2+a}{3} = 10$$

$$a^2+a = 30$$

$$a^2+a-30=0$$

Resolvente

$$\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot 1\cdot(-30)}}{2\cdot 1} \quad x_1 = 5 \quad x_2 = -6$$

$\boxed{a = 5; -6}$ / $F'(0) = 10$

(4) $F(x) = 2\sqrt{x+15} - 2\ln(x)$ $D_{mF} = (0; +\infty)$

Para hallar su imagen estudiaré la monotonía de F a través del estudio de su derivada

$$F'(x) = \frac{2}{2\sqrt{x+15}} - 2 \cdot \frac{1}{x}$$

$$F'(x) = \frac{1}{\sqrt{x+15}} - \frac{2}{x}$$ $F'(x) = 0$

$D_m F' = (0; +\infty)$

$$\frac{1}{\sqrt{x+15}} - \frac{2}{x} = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{x+15}} = \frac{2}{x}$$

$$1 \cdot x = 2\sqrt{x+15}$$

$$\frac{x}{2} = \sqrt{x+15}$$

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \left(\cancel{\sqrt{x+15}}\right)^{\cancel{2}}$$

$$\frac{x^2}{4} = x+15$$

$$x^2 = 4(x+15)$$

$$x^2 = 4x+60$$

$$x^2 - 4x - 60 = 0$$

Resolvente

$$\frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-60)}}{2 \cdot 1}$$

$x = 10$ $x = -6$

Punto crítico   Fuera del Dm

Aplico Bolzano

	$(0; 10)$	10	$(10; +\infty)$
F'	$-$	0	$+$
F	↘	mínimo	↗

$$f'(1)= \frac{1}{\sqrt{1+15}} - \frac{2}{1} = \boxed{-}\frac{7}{4}$$

$$f'(11)= \frac{1}{\sqrt{11+15}} - \frac{2}{11} = +$$

Asíntotas

A.V $\lim_{x\to 0^+} 2\sqrt{x+15} - 2\ln(x)$ (No calculo 0^- por el Dom)

$2\sqrt{15} - 2\ln(0^+) = +\infty$ A.V en $x=0$

A.O No es imprescindible para saber la imagen de f porque a ln = f(x)

A.H

$\lim_{x\to\infty^+} 2\sqrt{x+15} - 2\ln(x) = +\infty$ ¿Por qué?

a < 0 ln = └

a > 0 ln ┌

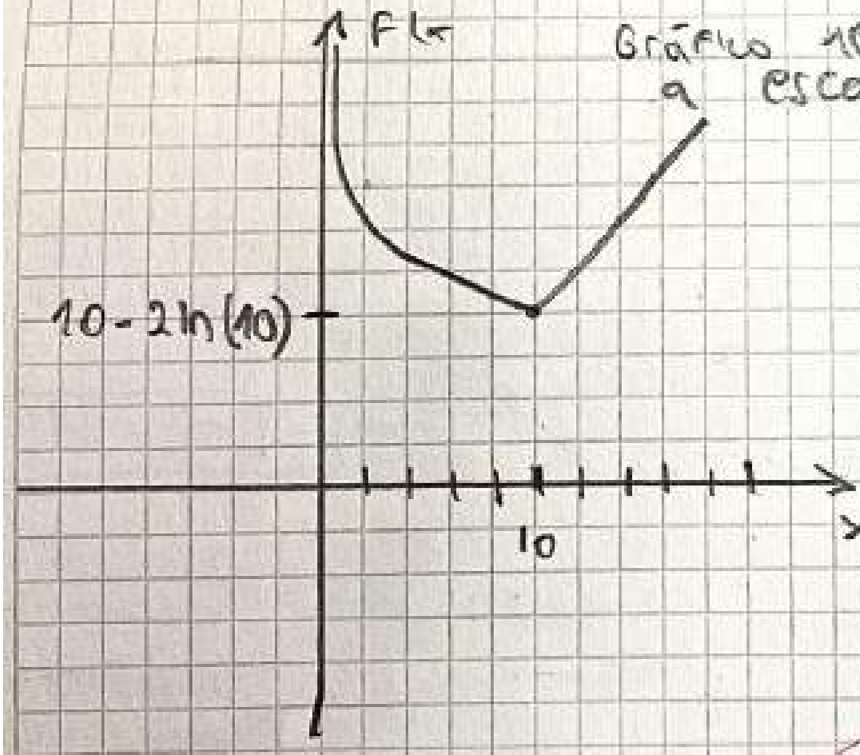
Idem A.V = no calculo al $-\infty$ porque f no está definida

Mínimo en $(10;\ 10-2\ln(10))$

$f(10)= 2\sqrt{10+15} - 2\ln(10)$

$f(10)= 10 - 2\ln(10) \approx 5,39$

Gráfico aproximado de f. No a escala



$$\operatorname{Im} f = [10 - 2\ln(10); +\infty)$$