

30/09/22

TEMA 3

PUNTAJE	1) 2 puntos	2) a) 0,5 punto b) 0,5 punto c) 1 punto	3) 2,5 puntos	4 al 10) 0,5 cada uno
---------	-------------	---	---------------	-----------------------

1) Dadas las matrices es $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Hallar la matriz $M = A^T \cdot A - B \cdot B^T$, donde A^T y B^T representan las matrices A y B traspuestas

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow B^T = (0 \ 1)$$

Calculamos los productos pedidos para poder hallar la matriz M

$$A^T \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot B^T = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot (0 \ 1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

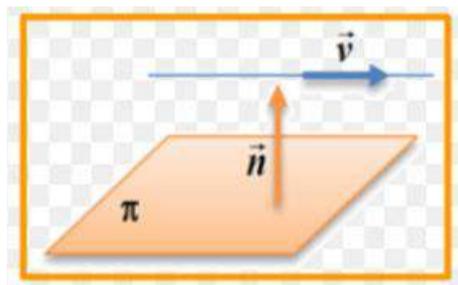
$$M = A^T \cdot A - B \cdot B^T = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Recomendación: Puedes rever la tutoría en línea 6 para revisar el tema Operaciones con matrices

2) Sea la recta de ecuación $r: (x; y; z) = \lambda(1; 5; 2) + (3; -1; 2)$ y el plano $\pi_1: ax - y + 4z - 2 = 0$,

a) Calcular el valor de $a \in \mathfrak{R}$ para que el plano π_1 sea paralelo a la recta r

Para poder hallar el valor de a debemos trabajar con el vector normal del plano y el vector director de la recta, para que el plano sea paralelo a la recta el vector normal del plano debe ser perpendicular al vector director de la recta



$$\pi_1: ax - y + 4z - 2 = 0 \rightarrow \vec{n}_1 = (a; -1; 4)$$

$$(x; y; z) = \lambda(1; 5; 2) + (3; -1; 2) \rightarrow \vec{v}_r = (1; 5; 2)$$

$$\pi_1 \parallel r \Leftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{v}_r$$

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{v}_r = 0 \rightarrow (a; -1; 4) \cdot (1; 5; 2) = 0$$

$$a - 5 + 8 = 0 \rightarrow a + 3 = 0 \rightarrow a = -3$$

Recomendación: Puedes rever la tutoría en línea 4 para revisar el tema plano y recta perpendiculares

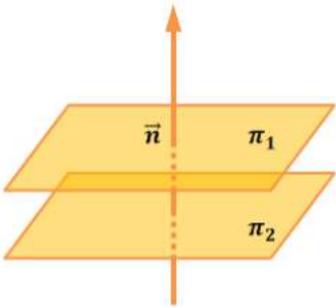
b) ¿Existe algún valor de a para que la recta sea perpendicular al plano?

Para determinar el valor de a para que la recta sea perpendicular al plano, el vector director de la recta debe ser proporcional al vector normal del plano, es decir se debe cumplir :

$$\pi_1 : ax - y + 4z - 2 = 0 \rightarrow \vec{n}_1 = (a; -1; 4)$$

$$(x; y; z) = \lambda(1; 5; 2) + (3; -1; 2) \rightarrow \vec{v}_r = (1; 5; 2)$$

$$\vec{n}_1 = k\vec{v}_r \quad \text{o} \quad \frac{n_{1x}}{v_{rx}} = \frac{n_{1y}}{v_{ry}} = \frac{n_{1z}}{v_{rz}} = k \rightarrow \frac{a}{1} = \frac{-1}{5} \neq \frac{4}{2} \rightarrow \vec{n}_1 \not\parallel \vec{v}_r \rightarrow \boxed{\nexists a \in \mathbb{R} / \vec{r} \perp \pi_1}$$



Recomendación: Puedes rever la tutoría en línea 2 para revisar el tema recta perpendicular a un plano

c) Hallar la ecuación paramétrica de la recta que pasa por $P_0 = (2; -1; 5)$ es paralela a la recta r

Para determinar la ecuación de la recta pedida, que podemos llamarla l , debemos conocer su vector director y un punto de esta, sabemos que la recta l buscada debe ser paralela a la recta r dada, entonces podemos asegurar que tiene igual vector director.

Datos:

$$l : \begin{cases} P_0 = (2; -1; 5) \\ \vec{v}_l = \vec{v}_r = (1; 5; 2) \end{cases}$$

Planteamos la ecuación vectorial de la recta l para luego expresarla en forma paramétrica

$$l : (x; y; z) = (2; -1; 5) + \lambda(1; 5; 2)$$

$$(x; y; z) = (2; -1; 5) + (1\lambda; 5\lambda; 2\lambda)$$

$$(x; y; z) = (2 + 1\lambda; -1 + 5\lambda; 5 + 2\lambda)$$

$$\begin{cases} x = 2 + 1\lambda \\ y = -1 + 5\lambda \\ z = 5 + 2\lambda \end{cases} \text{ Ecuación paramétrica de la recta } l$$

Recomendación: Puedes rever el tema ecuación de la recta en forma paramétrica en la Unidad 1 del libro de la cátedra.

3) Dado el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + 3y + z = -2 \\ x + y + kz = 0 \end{cases}$$

Determinar los valores $k \in \mathbb{R}$, para que el sistema admita solución única, infinitas soluciones y no admita solución.

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + 3y + z = -2 \\ x + y + kz = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & k \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & k \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3k - 1 - 2(2k - 1) + 3 \cdot (-1) = 3k - 1 - 4k + 2 - 3 = -k - 2$$

Buscamos los valores que anulan el determinante de A

$$-k - 2 = 0 \rightarrow \boxed{k = -2}$$

A partir de estos valores se analiza el sistema reemplazando en la matriz ampliada por cada uno de ellos.

1) Si $k \neq -2 \rightarrow SCD$

2) Evaluamos el sistema en $k = -2$, en este caso la matriz ampliada del sistema es:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + 3y + z = -2 \\ x + y + kz = 0 \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & -4 \\ 0 & -1 & -5 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{(-1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 5 & 4 \\ 0 & -1 & -5 & -1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -7 & -7 \\ 0 & \boxed{1} & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right)$$

$\rightarrow r(A) \neq r(A') \therefore SI$

$$SCD : \mathbb{R} - \{-2\}$$

$$SCI : \nexists k \in \mathbb{R}$$

$$SI : k = -2$$

Recomendación: Puedes rever las tutorías en línea 27 y 29 para revisar el tema análisis de un sistema de ecuaciones en función de un parámetro

4) Siendo las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ la matriz X que satisface que $AX + BX = C$ es:

a) $X = \begin{pmatrix} -\frac{3}{7} & \frac{4}{7} \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

b) $X = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{4}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$

c) $X = \begin{pmatrix} 11 & 12 \\ 13 & 17 \end{pmatrix}$

d) $X = \begin{pmatrix} 5 & 12 \\ 9 & 23 \end{pmatrix}$

Recomendación: Puedes rever las tutorías en línea 18 y 19 para revisar el tema ecuaciones matriciales

5) Para qué valores del parámetro $b \in \mathbb{R}$, el rango de la matriz es distinto de 3, siendo $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & -b \end{pmatrix}$

a) $\forall b \neq \frac{9}{5}$

b) $\forall b \in \mathbb{R}$

c) $\nexists b \in \mathbb{R}$

d) $b = \frac{9}{5}$

Recomendación: Puedes rever la tutoría en línea 15 para revisar el tema rango de una matriz

6) Sabiendo que $|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 5$, entonces el determinante $|B| = \begin{vmatrix} -3 & 3 & 0 \\ a & b & c \\ 2-4a & 2-4b & 2-4c \end{vmatrix}$ es:

a) $|B| = 15$

b) $|B| = -15$

c) $|B| = 60$

d) $|B| = -60$

Recomendación: Puedes rever la tutoría en línea 14 para revisar el tema propiedades de los determinantes

7) El conjunto de valores de $a \in \mathbb{R}$ tales que la matriz A no admita inversa siendo $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & a & 0 \end{pmatrix}$ es:

a) \mathbb{R}

b) $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$

c) \emptyset

d) $\{-1, 1\}$

Recomendación: Puedes rever la tutoría en línea 21 para revisar el tema matriz inversa.

8) El o los valores de $x \in \mathbb{R}$ que verifican la ecuación $\begin{vmatrix} x-1 & -1 & -1 \\ 0 & x+2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$

a) $x=0 \vee x=1$

b) $\forall x \in \mathbb{R}$

c) $x \neq 0 \wedge x \neq 1$

d) $\nexists x \in \mathbb{R}$

Recomendación: Puedes rever la tutoría en línea 13 para revisar el tema cálculo de determinantes

9) Sea el sistema de ecuaciones $\begin{cases} -x + y - z = 0 \\ 3x - y + z = 6 \\ 2x + y - z = 9 \end{cases}$ entonces el conjunto solución del sistema es:

a) \emptyset

b) $\{(0; 0; 0)\}$

c) $\{(3; 3; 0)\}$

d) $\{(3; 3+z; z), z \in \mathbb{R}\}$

Recomendación: Puedes rever las tutorías en línea 25 y 26 para revisar el tema resolución de sistemas de ecuaciones lineales compatibles indeterminados

10) En una economía hipotética de dos industrias A y B la matriz de los coeficientes tecnológicos es $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 5 \\ 2 & 3 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$.

Si el vector demanda final es $DF = \begin{pmatrix} 30 \\ 6 \end{pmatrix}$, entonces el vector producción es:

a) $X = \begin{pmatrix} 15 \\ 60 \end{pmatrix}$

b) $X = \begin{pmatrix} 90 \\ 105 \end{pmatrix}$

c) $X = \begin{pmatrix} 60 \\ 30 \end{pmatrix}$

d) $X = \begin{pmatrix} 105 \\ 90 \end{pmatrix}$

Recomendación: Puedes rever la tutoría en línea 16 para revisar el tema Matriz de Insumo Producto