

Examen final – Resuelto Tema 1

Ecuación de un plano

(1 pt) Hallen una ecuación implícita para el plano Π que es paralelo a la recta $R = \{X \in R^3: X = k(1; 2; -1) + (1; 2; -3), k \in R\}$ y contiene a la recta $L = \{X \in R^3: X = t(-1; 1; 0) + (0; 0; 1), t \in R\}$

Si Π es paralelo a R y contiene a L , se puede definir un vector normal al plano a partir del producto vectorial de los vectores directores de las rectas:

$$\vec{N} = \begin{vmatrix} \check{i} & \check{j} & \check{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (1; 1; 3)$$

Como punto del plano, elegimos el punto de la recta L . Luego:

$$\Pi: x + y + 3z = d \rightarrow 0 + 0 + 3 \cdot 1 = d \rightarrow 3 = d \rightarrow \Pi: x + y + 3z = 3$$

Respuesta:

Distancia de punto a recta

(1 pt) Hallen la distancia del punto $P = (1; 1; 1)$ a la recta $L = \{X \in R^3: X = t(2; 1; 4) + (0; 0; -3), t \in R\}$

Definimos la ecuación de un plano perpendicular a L que contenga al punto P dado. Para ello, utilizamos como vector normal al plano el vector director de la recta:

$$\begin{aligned} \Pi: [(x; y; z) - (1; 1; 1)](2; 1; 4) &= 0 \\ \Pi: 2(x - 1) + (y - 1) + 4(z - 1) &= 0 \\ \Pi: 2x + y + 4z &= 7 \end{aligned}$$

Buscamos el punto Q de intersección entre la recta y el plano, reemplazando las ecuaciones paramétricas de la recta en la ecuación del plano:

$$\begin{aligned} 2 \cdot 2t + t + 4(4t - 3) &= 7 \\ 4t + t + 16t - 12 &= 7 \\ 21t = 19 &\rightarrow t = \frac{19}{21} \rightarrow Q = \left(\frac{38}{21}; \frac{19}{21}; \frac{13}{21}\right) \end{aligned}$$

La distancia entre P y L es la distancia entre P y Q :

$$Dist(P; Q) = \sqrt{\left(\frac{38}{21} - 1\right)^2 + \left(\frac{19}{21} - 1\right)^2 + \left(\frac{13}{21} - 1\right)^2} = \frac{\sqrt{357}}{21}$$

Respuesta:

Subespacios

Señalen con una cruz la única opción correcta en cada uno de los siguientes enunciados.

a) (0,5 pt) El conjunto $\langle (-2; 1; -2); (3; -1; 5); (13; k; 19) \rangle$ es una base de R^3 cuando k es distinto de:

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 5 \\ 13 & k & 19 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{F_1 \\ 3F_1 + 2F_2 \\ 13F_1 + 2F_3}} \begin{vmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 13 + 2k & 12 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{F_1 \\ F_2 \\ (13 + 2k)F_2 - F_3}} \begin{vmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 8k + 40 \end{vmatrix}$$

Si $8k + 40 \neq 0 \rightarrow$ la matriz tiene rango 3 y los tres vectores son linealmente independientes: forman base.

Luego $8k + 40 \neq 0 \rightarrow k \neq -5$

0 7 5 -5

b) (0,5 pt) Para el valor de k hallado en el ítem anterior, la dimensión del subespacio $\langle (-2; 1; -2); (3; -1; 5); (13; k; 19) \rangle$ es:

Si $k = -5 \rightarrow$ el rango de la matriz es 2 porque se anula la última fila. Luego esa será la dimensión del subespacio.

1 2 3 4

Cónicas

Calculen el centro y la excentricidad de la hipérbola de ecuación: $x^2 - 4x - y^2 + 8y - 8 = 0$

Completamos cuadrados en la igualdad: $x^2 - 4x - y^2 + 8y - 8 = 0$

$$(x^2 - 4x + 4) - 4 - [(y^2 - 8y + 16) - 16] - 8 = 0$$

$$(x - 2)^2 - (y - 4)^2 - 4 + 16 - 8 = 0$$

$$(x - 2)^2 - (y - 4)^2 = -4$$

$$\frac{(x - 2)^2}{-4} - \frac{(y - 4)^2}{-4} = \frac{-4}{-4}$$

$$\frac{-4}{(y - 4)^2} - \frac{-4}{(x - 2)^2} = -4$$

$$\frac{-4}{4} - \frac{-4}{4} = 1$$

$$a = b = 2 \rightarrow c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow c^2 = 8 \rightarrow c = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

(0,5 pt) **Centro:**

(0,5 pt) **Excentricidad:**

Sistemas de ecuaciones lineales

(1 pt) Hallen todos los valores de $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $(1; 0; -1)$ es una de las infinitas soluciones del sistema:

$$\begin{cases} x + y + 4z = -3 \\ -ay + bz = -2 \\ y - 2z = 2 \end{cases}$$

Si $(1; 0; -1)$ es una de las infinitas soluciones, verifica las ecuaciones del sistema:

$$\begin{cases} 1 + 0 + 4(-1) = -3 \rightarrow \text{verifica} \\ -a \cdot 0 + b(-1) = -2 \rightarrow b = 2 \\ 0 - 2(-1) = 2 \rightarrow \text{verifica} \end{cases}$$

Si $b = 2$ el sistema se reescribe como:

$$\begin{cases} x + y + 4z = -3 \\ -ay + 2z = -2 \\ y - 2z = 2 \end{cases}$$

Analizamos el sistema en forma matricial:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & -a & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{F_1 \\ F_2 + aF_3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 - 2a & -2 + 2a \end{array} \right)$$

Si $2 - 2a \neq 0 \rightarrow a \neq 1$ el sistema tendrá solución. Luego:

Respuesta:

Determinantes

Señalen con una cruz la única opción correcta en cada uno de los siguientes enunciados.

a) (0,5 pt) Si $A, B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ son tales que $\det(A) = 10$ y $\det(A \cdot B) = 15$ entonces $\det(2B^{-1})$ es igual a:

$$\det(A \cdot B) = 15 \rightarrow \underbrace{\det(A)}_{10} \cdot \det(B) = 15 \rightarrow \det(B) = \frac{15}{10} \rightarrow \det(B) = \frac{3}{2} \rightarrow \det(B^{-1}) = \frac{2}{3}$$

$$\text{Luego: } \det(2B^{-1}) = 2^3 \cdot \det(B^{-1}) = 8 \cdot \frac{2}{3} = \frac{16}{3}$$

 $\frac{4}{3}$ $\frac{2}{3}$

12

 $\frac{16}{3}$

b) (0,5 pt) Si $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 8$ entonces $\det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ a & b & a & 0 \\ c & d & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es:

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ a & b & a & 0 \\ c & d & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \stackrel{\text{por la fila 1}}{=} 2 \begin{vmatrix} b & a & 0 \\ d & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{\text{por la fila 3}}{=} 2 \begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} =$$

$$= -1 \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -1 \cdot 8 = -8$$

8 -8 -16 24

Transformaciones lineales

Señalen con una cruz la única opción correcta en cada uno de los siguientes enunciados.

a) (0,75 pt) Si $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es el deslizamiento cortante de factor 5 en la dirección del eje y entonces $T(1; -3)$ es igual a:

$$T(x; y)_{k=5, \text{eje } y} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow T(1; -3)_{k=5, \text{eje } y} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = (1 \cdot 1 + 0 \cdot (-3); 5 \cdot 1 + 1 \cdot (-3)) = (1; 2)$$

(-14; -3) (5; -3) (1; -15) (1; 2)

b) (0,75 pt) La transformación lineal $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ cuya matriz canónica asociada es $A_T = \begin{pmatrix} 7 & -12 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ transforma el cuadrado unitario de \mathbb{R}^2 en un paralelogramo cuya área es:

$$\det(A_T) = \begin{vmatrix} 7 & -12 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 7(-2) - 3(-12) = -14 + 36 = 22$$

22 50 5 11

Números complejos

Calculen el módulo y el argumento de $z = (-1 + i)^{11}(-2i)$

$$-2i = 2 \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2} \right)$$

$$-1 + i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{3\pi}{4} \right) \rightarrow (-1 + i)^{11} = 2^{\frac{11}{2}} \left(\cos \frac{33\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{33\pi}{4} \right)$$

$$(-1 + i)^{11}(-2i) = 2 \cdot 2^{\frac{11}{2}} \left(\cos \left(\frac{3\pi}{2} + \frac{33\pi}{4} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{3\pi}{2} + \frac{33\pi}{4} \right) \right)$$

$$2 \cdot 2^{\frac{11}{2}} = 2^{\frac{13}{2}}$$

$$\frac{3\pi}{2} + \frac{33\pi}{4} = \frac{39\pi}{4} = \underbrace{\frac{32\pi}{4}}_{\text{vueltas completas}} + \frac{7\pi}{4}$$

(0,5 pt) **Módulo:**

(0,5 pt) **Argumento:**

Polinomios

Respondan a cada una de las siguientes consignas:

a) (0,5 pt) Si $P(x) \in \mathbb{R}[X]$ tiene como raíces a $2 + i$; $-3i$; $1 + \sqrt{5}$ entonces el mínimo grado posible de $P(x)$ es:

Si $P(x) \in \mathbb{R}[X]$ además de ser raíz $2 + i$ también lo es $2 - i$. Lo mismo sucede con $-3i$ y $3i$. Con la raíz $1 + \sqrt{5}$ tenemos un total de 5 raíces para un polinomio de coeficientes reales. Luego, el mínimo grado posible es 5.

Respuesta:

b) (0,5 pt) El polinomio $Q(x) = (x^2 - 2)(x^2 - x + 2)(x^3 - x^2 - 2x + 2)$ tiene:

- $x^2 - 2 = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$
- $x^2 - x + 2 = 0 \rightarrow x_1, x_2 = \frac{1 \pm \sqrt{1-8}}{2} = \frac{1 \pm i\sqrt{7}}{2} \rightarrow x^2 - x + 2 = \left(x - \left(\frac{1+i\sqrt{7}}{2}\right)\right)\left(x - \left(\frac{1-i\sqrt{7}}{2}\right)\right)$
- $x^3 - x^2 - 2x + 2 = x^2(x-1) - 2(x-1) = (x^2 - 2)(x-1) = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x-1)$

$$Q(x) = (x - \sqrt{2})^2 (x + \sqrt{2})^2 (x - 1) \left(x - \left(\frac{1 + i\sqrt{7}}{2}\right)\right) \left(x - \left(\frac{1 - i\sqrt{7}}{2}\right)\right)$$

Respuesta: 3 (tres) raíces simples y 2 (dos) raíces dobles.

c) (0,5 pt) La expresión factorizada de $Q(x)$ del ítem b) en $\mathbb{C}[X]$ es:

Respuesta: $Q(x) = (x - \sqrt{2})^2 (x + \sqrt{2})^2 (x - 1) \left(x - \left(\frac{1 + i\sqrt{7}}{2}\right)\right) \left(x - \left(\frac{1 - i\sqrt{7}}{2}\right)\right)$
