

- Ejercicio 1 (1.25 puntos)

Considera los vectores  $\vec{a} = (k, 0, k)$  y  $\vec{b} = (k, k, k)$  con  $k \in \mathbb{R}$  y  $\alpha$  es el ángulo determinado por dichos vectores. Elegí la única opción que muestra el valor de  $\cos(\alpha)$ .

- A)  $-\frac{1}{3}$                       B)  $\frac{2}{6}$                       C)  $-\frac{2}{\sqrt{6}}$                       D)  $\frac{2}{\sqrt{6}}$

Opción correcta: D)

Resolución

El cálculo del producto escalar  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos(\alpha)$  permitirá resolver la ecuación:  $2k^2 = \sqrt{2}|k| \cdot \sqrt{3}|k| \cdot \cos(\alpha)$ . Así se puede determinar el valor de  $\cos(\alpha)$ .

Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 1.

---

- Ejercicio 2 (1.25 puntos)

$\vec{v}$  es un vector de  $\mathbb{R}^3$  paralelo al versor  $\hat{j}$ , de norma 9 y con una de sus coordenadas negativa. Si  $A = (\frac{15}{2}, \frac{9}{2}, -\frac{1}{10})$  es el punto medio entre los extremos de los vectores  $\vec{v}$  y  $\vec{u}$ , elegí la opción que indica las coordenadas de  $\vec{u}$ .

- A)  $(-\frac{15}{2}, -\frac{9}{2}, \frac{1}{10})$       B)  $(-15, -18, \frac{1}{5})$       C)  $(\frac{15}{2}, 9, -\frac{1}{5})$       D)  $(15, 18, -\frac{1}{5})$

Opción correcta: D)

Resolución

Si  $\vec{v}$  es paralelo al versor  $\hat{j}$  es de la forma  $\vec{v} = (0, m, 0)$ . Como su norma es 9 y tiene una coordenada negativa, luego  $\vec{v} = (0, -9, 0)$ . Como  $A = (\frac{15}{2}, \frac{9}{2}, -\frac{1}{10})$  es el punto medio entre los extremos de los vectores  $\vec{v}$  y  $\vec{u}$ , puede plantearse la igualdad:  $(\frac{0+u_x}{2}, \frac{-9+u_y}{2}, \frac{0+u_z}{2}) = (\frac{15}{2}, \frac{9}{2}, -\frac{1}{10})$ . Igualando coordenada a coordenada, se puede obtener la respuesta al problema. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 1.

---

- Ejercicio 3 (1.25 puntos)

Elegí la opción que indica cuánto mide la distancia entre el punto  $A = (2, -1, -1)$  y la recta  $r = \{X \in \mathbb{R}^3 : X = t(2, 2, 1) + (2, 1, 1), t \in \mathbb{R}\}$ .

- A)  $\sqrt{2}$                       B) 1                      C)  $\frac{\sqrt{6}}{3}$                       D) 2

Opción correcta: D)

Resolución

Para calcular la distancia pedida se puede escribir la ecuación de plano que contiene al punto  $A$  y es normal a la recta  $r$ , luego encontrar el punto de intersección entre la recta y el plano -en este caso es  $(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ - y, por último, calcular la distancia entre ese punto y  $A$ . Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 3.

---

- Ejercicio 4 (1.25 puntos)

Considera las ecuaciones de los planos  $\pi_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -3x + 3y = -3 + 3z\}$  y  $\pi_2 = \{X \in \mathbb{R}^3 : X = n(1, 1, 0) + k(2, 0, 2) + (1, 1, 1); n, k \in \mathbb{R}\}$ .

Elegí la opción que indica la posición relativa de los planos.

- A) Son paralelos.  
 B) Son coincidentes.  
 C) Son perpendiculares.  
 D) La intersección es una recta y no son perpendiculares.

Opción correcta: D)

Resolución

Los puntos del plano  $\pi_2$  pueden escribirse como  $(n+2k+1, n+1, 2k+1)$ ,  $n, k \in \mathbb{R}$ . Al reemplazarlo en la ecuación de  $\pi_1$  -en busca de la intersección- se obtiene  $k = 0$ . Para ese valor obtenido, si se lo reemplaza en la ecuación de  $\pi_2$  se obtiene la ecuación de una recta. De esta forma puede descartarse que sean paralelos o coincidentes. Basta probar que el producto escalar entre el vector normal a  $\pi_1$  y el vector normal a  $\pi_2$  -puede obtenerse con el producto vectorial entre sus vectores directores- no es nulo. Luego, los planos no son perpendiculares y tienen como intersección una recta. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 3.

---

- Ejercicio 5 (1.25 puntos)

Considerá el conjunto  $A = \{(0, -3, -1), (k, 4, 0), (-3, 0, k-3)\}$ . Elegí la opción que muestra los valores que puede tomar  $k$  si se quiere que  $A$  sea un conjunto de generadores de  $\mathbb{R}^3$ .

- A)  $k \in \{1, -4\}$
- B)  $k \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 4\}$
- C)  $k \in \mathbb{R} \setminus \{1, -4\}$
- D)  $k \in \emptyset$

Opción correcta: B)

Resolución

Resulta más cómodo ver cuando  $A = \{(0, -3, -1), (k, 4, 0), (-3, 0, k-3)\}$  no es un generador de  $\mathbb{R}^3$  y descartar esos valores. Para que no sea generador debe ocurrir que los vectores deben ser

L.D. con lo cual el determinante de la matriz  $\begin{pmatrix} 0 & -3 & -1 \\ k & 4 & 0 \\ -3 & 0 & k-3 \end{pmatrix}$  debe ser cero. De esto obtenemos

que  $3k^2 - 9k - 12 = 0$  de donde salen los valores de  $k$  para los cuales el conjunto no es una base. Entonces los valores para los cuales el conjunto es generador de  $\mathbb{R}^3$  son  $\mathbb{R} \setminus \{-1, 4\}$ . Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 4.

---

- Ejercicio 6 (1.25 puntos)

Considerá el subespacio  $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : nx_1 + x_2 = 0\}$  decidí cual opción de valores  $n$  y  $m$  para los cuales el conjunto  $A = \{(0, 0, 1), (1, 0, m)\}$  resulta una base de  $S$  sabiendo que el punto  $(-\frac{3}{7}, \frac{1}{4}, 0)$  pertenece a  $S$ .

- A)  $n = -\frac{7}{12}$  y  $m = -\frac{7}{12}$
- B)  $n = \frac{7}{12}$  y  $m = -\frac{7}{12}$
- C)  $n = \frac{7}{12}$  y  $m = \frac{7}{12}$
- D)  $n = -\frac{7}{12}$  y  $m = \frac{7}{12}$

Opción correcta: B)

Resolución

Reemplazando  $(1, 0, m)$  en  $nx_1 + x_2 = 0$  obtenemos  $m = -n$  mientras que al reemplazar  $(-\frac{3}{7}, \frac{1}{4}, 0)$  tenemos  $-\frac{3}{7}n + \frac{1}{4} = 0$  con lo cual  $n = \frac{7}{12}$  y por lo tanto  $m = -\frac{7}{12}$ . Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 4.

---

---

- Ejercicio 7 (1.25 puntos)

Indicá la opción que muestra la ecuación de la hipérbola cuyos focos son  $(-9; 0)$  y  $(9; 0)$  y cuya distancia entre sus vértices es 6.

A)  $\frac{y^2}{72} - \frac{x^2}{9} = 1$

C)  $\frac{x^2}{72} - \frac{y^2}{9} = 1$

B)  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{72} = 1$

D)  $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{72} = 1$

Opción correcta: B)

Resolución

Como la distancia entre los vértices es 6, entonces la distancia entre el centro y cada vértice es 3. También podemos deducir que la distancia entre los focos es 18, entonces  $c = 9$  y usando que  $c^2 = a^2 + b^2$  averiguamos que  $b^2 = 72$ . Con estos datos obtenidos es posible escribir la ecuación de la hipérbola:  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{72} = 1$ . Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 5.

---

- Ejercicio 8 (1.25 puntos)

Elegí entre las opciones, aquella que muestra el valor exacto de la excentricidad y las coordenadas del centro de la cónica  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 3x^2 + y^2 - 6x + 30y + 216 = 0\}$

A)  $e = \frac{\sqrt{6}}{3}; (1, -15)$

C)  $e = \sqrt{3}; (-1, 15)$

B)  $e = \frac{\sqrt{3}}{6}; (1, -15)$

D)  $e = \frac{\sqrt{3}}{6}; (-1, 15)$

Opción correcta: A)

Resolución

Tras completar cuadrados en la ecuación dada, se puede construir la ecuación canónica de la cónica:  $\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+15)^2}{12} = 1$ . Desde aquí se puede leer y deducir que se trata de una elipse de centro  $(1; -15)$  con eje focal paralelo al *eje y* y en consecuencia, vale la igualdad  $12 = 4 + c^2$  de donde se deduce que  $c = \sqrt{8}$ . Finalmente, la excentricidad será  $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{12}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$ . Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 5.

---