**UBAXXI - Álgebra A - Resolución del 1er. parcial - 18/09/24 - Tema 1**

---

- Ejercicio 1 (1.25 puntos)
  Elegí la opción que muestra las coordenadas de un vector $\vec{w}$ de norma $3\sqrt{30}$ que es paralelo al vector $\vec{v} = \left(\frac{5}{7}, -\frac{1}{7}, -\frac{2}{7}\right)$.

  A) $(-15, -3, -6)$

  B) $\left(\frac{15\sqrt{30}}{7}, -\frac{3\sqrt{30}}{7}, -\frac{6\sqrt{30}}{7}\right)$

  C) $(-15, 3, 6)$

  D) $\left(\frac{-15\sqrt{30}}{7}, \frac{3\sqrt{30}}{7}, \frac{6\sqrt{30}}{7}\right)$

  Opción correcta: C)
  Resolución
  $\vec{w} = k \cdot \left(\frac{5}{7}, -\frac{1}{7}, -\frac{2}{7}\right)$, con $k \neq 0$ es un vector paralelo a $\vec{v}$. Dado que $||\vec{w}|| = 3\sqrt{30}$ entonces se debe plantear la ecuación: $\sqrt{\left(\frac{5k}{7}\right)^2 + \left(-\frac{k}{7}\right)^2 + \left(-\frac{2k}{7}\right)^2} = 3\sqrt{30}$. Esta ecuación tiene dos soluciones y para una de esas soluciones se obtiene la respuesta correcta. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 1.

---

- Ejercicio 2 (1.25 puntos)
  Considerá los vectores de $\mathbb{R}^3$ $\vec{v}$ y $\vec{w}$. El vector $\vec{v}$ tiene norma 4, $\vec{w}$ un vector de norma $\sqrt{3}$ y el ángulo determinado por $\vec{v}$ y $\vec{w}$ es $\frac{3\pi}{4}$. Elegí la única opción que muestra el resultado del producto escalar entre dichos vectores.

  A) $-2\sqrt{6}$

  B) $-0{,}5\sqrt{6}$

  C) $2\sqrt{6}$

  D) $-2\sqrt{2}$

  Opción correcta: A)
  Resolución
  El producto escalar entre dos vectores se calcula mediante la fórmula $\vec{v} \cdot \vec{w} = ||\vec{v}|| \cdot ||\vec{w}|| \cdot \cos(\alpha)$. Reemplazar los datos del enunciado en esta expresión permite obtener la respuesta correcta. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 1.

---

- Ejercicio 3 (1.25 puntos)
  Elegí la opción que indica el valor que corresponde a la distancia del punto $A = (-1, 2, 3)$ al plano de ecuación $\Pi = \{X \in \mathbb{R}^3 : 2x + y - z + 1 = 0\}$.

  A) $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

  B) $\sqrt{6}$

  C) $\dfrac{6}{\sqrt{3}}$

  D) $0$

  Opción correcta: A)
  Resolución
  Para calcular la distancia de un punto $A$ a un plano $\Pi$ los pasos a seguir son: escribir la ecuación de la recta $r$ normal al plano $\Pi$ que contiene al punto $A$, calcular el punto $B$ como intersección entre la recta $r$ y el plano $\Pi$ y, por último, calcular la distancia entre los puntos $A$ y $B$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 3.

---

- Ejercicio 4 (1.25 puntos)
  Considerá la recta de ecuación $(x; y; z) = \alpha \cdot (3, 6, 9) + (4, 2, -1)$ y el plano de ecuación $-x + y - z = 1$. Elegí la única afirmación verdadera.

  A) La recta está contenida en el plano.

  B) La recta y el plano son paralelos.

  C) La recta y el plano son ortogonales.

  D) La recta y el plano se cortan en un único punto.

Opción correcta: D)
Resolución
Todo punto de la recta puede escribirse como $(3\alpha+4, 6\alpha+2, 9\alpha-1)$ siendo $\alpha \in \mathbb{R}$. Si se reemplaza este punto en la ecuación del plano, se obtiene un único valor de $\alpha$ de manera tal que la recta y el plano se intersecan en un único punto: $(3, 0, -4)$. Además, puede probarse que no son ortogonales la recta y el plano porque sus vectores directores no son paralelos. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 3.

---

- Ejercicio 5 (1.25 puntos)
Elegí la opción que muestra el valor de $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ para que el conjunto $\{(1, 0, -1), (-1, k, 0), (0, -2, k+1)\}$ no sea una base de $\mathbb{R}^3$.

A) $-2$ B) $1$ C) $2$ D) $-1$

Opción correcta: B)
Resolución
Como el conjunto no debe ser una base entonces los vectores deben ser L.D. con lo cual el determinate de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & k & 0 \\ 0 & -2 & k+1 \end{pmatrix}$ debe ser cero. De esto obtenemos que $k^2 + k - 2 = 0$ que tiene por soluciones $k = 1$ y $k = -2$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 4.

---

- Ejercicio 6 (1.25 puntos)
Considerá el subespacio $S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : nx_1 + 2x_2 = 0 \wedge x_2 + mx_3 - x_4 = 0\}$.
Elegí la opción que muestra los valores de $n$ y $m$ que hacen que el subespacio tenga como base al conjunto $\{(-2, 1, 0, 1), (0, 0, 1, 3)\}$.

A) $n = -1$ y $m = 3$
C) $n = -1$ y $m = -3$
B) $n = 1$ y $m = -3$
D) $n = 1$ y $m = 3$

Opción correcta: D
Resolución
La única forma de reemplazo que nos da información es reemplazar las componentes de $(-2, 1, 0, 1)$ en $nx_1 + 2x_2 = 0$ y las componentes de $(0, 0, 1, 3)$ en $x_2 + mx_3 - x_4 = 0$, a partir de esto obtenemos el sistema: $\begin{cases} m - 3 = 0 \\ -2n + 2 = 0 \end{cases}$ de donde obtenemos que $m = 3$ y $n = 1$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 4.

---

- Ejercicio 7 (1.25 puntos)
Indicá el valor que debe tomar $k \in \mathbb{R}$ para que $36y^2 + 4x^2 - 2ky = 27$ corresponda a la ecuación de una elipse con centro $(0; 0,5)$

A) $k = 18$ B) $k = -0,5$ C) $k = 0$ D) $k = -18$

Opción correcta: A)
Resolución
A partir del método de completar cuadrados, se puede reescribir a la ecuación dada como:
$\frac{x^2}{9} + \left(y - \frac{k}{36}\right)^2 = \frac{3}{4} + \frac{k^2}{1296}$. Desde esta última expresión se puede leer que el centro de la elipse es $(0; 0,5)$ únicamente para $k = 18$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 5.

---

- Ejercicio 8 (1.25 puntos)
La hipérbola $H$ tiene excentricidad $2,25$ y sus focos son $F_1 = (0, -8)$ y $F_2 = (0, 10)$.
Indicá cuál resulta la única afirmación verdadera acerca de $H$.

A) $(0, 2)$ es el centro de $H$.
B) $(\sqrt{195}, 9) \in H$.
C) $(\sqrt{195}, -7) \notin H$.
D) $(0, 4)$ es uno de los vértices de $H$.

Opción correcta: B)
Resolución
A partir de conocer los focos de $H$ es posible obtener su centro, pues resulta el punto medio entre ellos: $(0,1)$. Usando que la excentricidad de $H$ se calcula como el cociente entre la mitad de la distancia entre los focos, y la mitad de la distancia entre los vértices, podemos deducir que este último valor será 4. En consecuencia, los vértices de $H$ son $(0,5)$ y $(0,-3)$. Luego, la primera y tercera afirmación resultan falsas. Además, usando la relación $c^2 = a^2 + b^2$, deducimos el tercer dato que nos falta para construir la ecuación canónica de $H$, la cual nos queda: $\frac{(y-1)^2}{16} - \frac{x^2}{65} = 1$. Reemplazando las coordenadas de cada punto que se mencionan en las opciones $B)$ y $C)$ verificamos que los dos pertenecen a $H$, luego la única afirmación correcta es la $B)$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 5.

---