ANÁLISIS MATEMÁTICO A (INGENIERIA Y CS. EXACTAS)(66) -Cátedra Cabana

SEGUNDO PARCIAL - 5/11/2024 - TEMA 1

1. Sea f una función con derivada continua que satisface $f(5) = 2$ y $\int_0^5 t.f(t)dt = 15$.

   Se quiere determinar el valor de $A = \int_0^{125} f'(x^{\frac{1}{3}})dx$

   a) (1 punto) Escribir la integral A en función de la variable $y = x^{\frac{1}{3}}$ (cambio de variable):
   ....$3\int_0^5 f'(y).y^2dy$......................................

   b) (1 punto) Calcular $A = \int_0^{125} f'(x^{\frac{1}{3}})dx =$................60..................................

   Resolución:

   Si se realiza el cambio de variable $y = x^{\frac{1}{3}}$ se obtiene $\int_0^5 f'(y)\cdot 3\cdot y^2dy = 3\int_0^5 f'(y).y^2dy$ ahora se puede aplicar el método de integración por partes:

   $$3\left(y^2f(y)\Big|_0^5 - \int_0^5 2yf(y)dy\right) = 3\left(25\cdot f(5) - 2\int_0^5 yf(y)dy\right) = 3(25\cdot 2 - 2\cdot 15) = 3\cdot 20 = 60$$

2. Sea la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n^3}(x-3)^n$.

   a) (1 punto) Determinar el radio de convergencia de la serie: ....$\frac{1}{4}$......

   b) (1 punto) Determinar todos los $x \in \mathbb{R}$ para los cuales la serie es convergente.

   ■ $\left[\frac{11}{4}; \frac{13}{4}\right]$

   □ $\left(\frac{11}{4}; \frac{13}{4}\right)$

   □ $\left[\frac{11}{4}; \frac{13}{4}\right)$

   □ $\left(\frac{11}{4}; \frac{13}{4}\right]$

   Resolución:

   Aplicando el método de la raíz: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\mid \frac{4^n}{n^3}(x-3)^n \mid} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{4}{\sqrt[n]{n^3}} \mid x-3 \mid = 4 \mid x-3 \mid$ pedimos que esta expresión sea menor que 1,

$| x-3 |< \frac{1}{4} \quad \longrightarrow \quad x \in \left(\frac{11}{4}; \frac{13}{4}\right)$ y el radio de convergencia es $\frac{1}{4}$

Ahora se analizan los extremos del intervalo: si $x = \frac{13}{4} \quad \longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n^3}\left(\frac{13}{4}-3\right)^n =$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n^3}(\frac{1}{4})^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ serie convergente

si $x = \frac{11}{4} \quad \longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n^3}\left(\frac{11}{4}-3\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n^3}(-\frac{1}{4})^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3}$ serie convergente absolutamente

La serie converge en $\left[\frac{11}{4}; \frac{13}{4}\right]$

3. (2 puntos) Hallar $a \in \mathbb{R}_{>0}$ para que el área encerrada entre el eje x, el gráfico de la función $f(x) = a.\sqrt{x}$ y la recta $x = 1$ sea igual a 10.

   $a =$.................15....................................

   Resolución:

   $$\int_0^1 a\sqrt{x}dx = ax^{\frac{3}{2}}.\frac{2}{3}\Big|_0^1 = a.\frac{2}{3} = 10 \quad \rightarrow a = 15$$

4. (1 punto) La integral $\int (\sec(2x)\tan(2x))dx$ es igual a:

   - ☐ $\frac{1}{2}\csc(2x) + C$
   - ■ $\frac{1}{2}\sec(2x) + C$
   - ☐ $\frac{1}{2}\cot(2x) + C$
   - ☐ $\frac{1}{2}\tan(2x) + C$

   Resolución:

   $\int (\sec(2x)\tan(2x))dx = \int \frac{1}{\cos(2x)}.\frac{\operatorname{sen}(2x)}{\cos(2x)}dx$ con el cambio de variable: $u = \cos(2x)$ se llega al resultado.

5. Sea la función $f(x) = 3\ln(g(x)) + 4x^2$. Si $P(x) = 1 + 9(x+1) + 40(x+1)^2$ es el polinomio de Taylor de orden 2 de la función $g(x)$ en $x_0 = -1$

   a) (1 punto) calcular $f'(x) =$....................$3.\frac{g'(x)}{g(x)} + 8x$.......(dar la respuesta en funcion de g) ....

b) (1 punto) calcular $f'(-1) =$............19...................

Resolución:

Para calcular $f'(x)$ tener en cuenta la composición en el primer término.

Del polinomio sabemos: $P(-1) = 1 = g(-1),\ P'(x) = 9 + 80(x+1)$ entonces

$P'(-1) = 9 = g'(-1)$ por lo tanto $f'(-1) = \dfrac{3}{1} \cdot 9 - 8 = 19$

6. (1 punto) La integral definida que calcula el área encerrada por el gráfico de la función $f(x) = 4\ln(\dfrac{x}{7}) - 1$, el eje x y la recta $x = 7e$ es:

- ☐ $\displaystyle\int_3^{7e} (4\ln(\frac{x}{7}) - 1)dx$
- ☐ $\displaystyle\int_0^{7e} (4\ln(\frac{x}{7}) - 1)dx$
- ■ $\displaystyle\int_{7e^{\frac{1}{4}}}^{7e} (4\ln(\frac{x}{7}) - 1)dx$
- ☐ $\displaystyle\int_0^{7e^{\frac{1}{4}}} (1 - 4\ln(\frac{x}{7}))dx + \int_{7e^{\frac{1}{4}}}^{7e} (4\ln(\frac{x}{7}) - 1)dx$

Resolución:

Se debe calcular dónde la función corta al eje x: $4\ln(\dfrac{x}{7}) - 1 = 0 \quad \longrightarrow \ln(\dfrac{x}{7}) = \dfrac{1}{4} \quad \rightarrow x = 7e^{\frac{1}{4}}$