ANÁLISIS MATEMÁTICO A (INGENIERIA Y CS. EXACTAS)(66) -Cátedra Cabana

SEGUNDO PARCIAL - 5/11/2022 - TEMA 3

1. Considere la función $h(x) = x \int_0^x e^{t^2} dt + 7$

   a) (1 punto) Calcular $h''(x) =$.....................$2e^{x^2}(1+x^2)$ ....

   b) (1 punto) Hallar el polinomio de Taylor de orden 2 centrado en $x_0 = 0$ de la función h:..................$P(x) = 7 + x^2$.......................

   Resolución:

   Se deriva con regla del producto, en el segundo término se utiliza el teorema fundamental del cálculo $h'(x) = 1. \int_0^x e^{t^2} dt + x.e^{x^2}$

   derivando nuevamente: $h''(x) = e^{x^2} + e^{x^2} + xe^{x^2} \cdot 2x = 2e^{x^2}(1+x^2)$

   Así $h(0) = 7,\ h'(0) = 0$ y $h''(0) = 2$, el polinomio pedido es: $P(x) = 7 + 0.x + \frac{2}{2!}x^2$

2. (2 puntos) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con derivada continua en $\mathbb{R}$ y tal que $\int_{1/2}^1 \frac{f'(2x)}{x^2}dx = 10$. Calcular $\int_{1/2}^1 \frac{f(2x)}{x^3}dx$, sabiendo que $f(1) = 14$ y $f(2) = 8$.

   .... 34......................................

   Resolución:

   Se aplica el método de partes en $\int_{1/2}^1 \frac{f(2x)}{x^3}dx$ tomando $u = f(2x)$ y $dv = x^{-3}$,

$$\int_{1/2}^1 \frac{f(2x)}{x^3}dx = -\frac{1}{2x^2}f(2x)\Big|_{\frac{1}{2}}^1 - \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{2f'(2x)}{-2x^2}dx = -\frac{1}{2}f(2) + \frac{1}{2.\frac{1}{4}}f(1) + 10 = 34$$

3. (2 puntos) La suma de la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2 \cdot 3^n + 4^n}{7^n}$ es:

   ■ $\frac{59}{42}$

   □ $\frac{35}{6}$

   □ $\frac{17}{6}$

☐ $\frac{13}{12}$

Resolución:

$\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2\cdot 3^n+4^n}{7^n} = 2\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{3}{7}\right)^n + \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{4}{7}\right)^n = 2.\frac{1}{1-\frac{3}{7}} + \frac{1}{1-\frac{4}{7}} - 3 - \frac{10}{7} = \frac{59}{42}$ (se deben restar los dos primeros términos al utilizar la fórmula que comienza en n = 0)

4. (1 punto) El área de la región comprendida entre los gráficos de las funciones $f(x) = \dfrac{16}{(x-2)^2}$; $y = 16$; $y = 4$ se calcula resolviendo:

☐ $\displaystyle\int_0^1 (f(x)-4)dx\ + \int_3^4 (f(x)-4)dx$

☐ $\displaystyle\int_4^{16} (f(x)-4)dx$

■ $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx\ + \int_3^4 f(x)dx\ - 8 + 24$

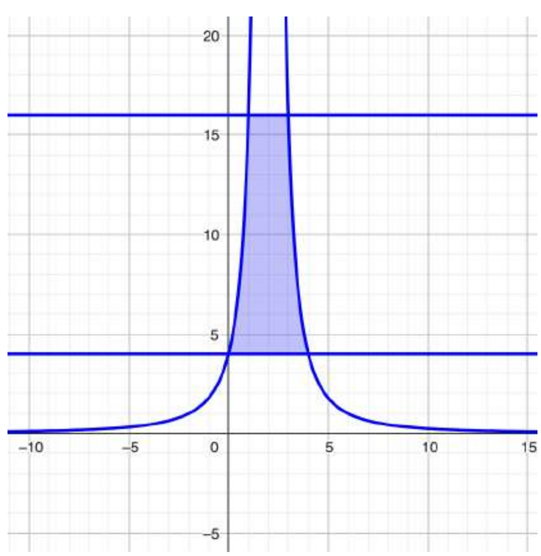
☐ $\displaystyle 2\int_0^1 f(x)dx\ + 24$

Resolución:

Para determinar los límites de integración: $\dfrac{16}{(x-2)^2} = 16 \quad \longrightarrow x = 1;\ x = 3$

$\dfrac{16}{(x-2)^2} = 4 \quad \longrightarrow x = 0;\ x = 4$

El área será $\displaystyle\int_0^1 (f(x)-4)dx + \int_1^3 (16-4)dx + \int_3^4 (f(x)-4)dx = \int_0^1 f(x)dx\ + \int_3^4 f(x)dx\ - 8 + 24$

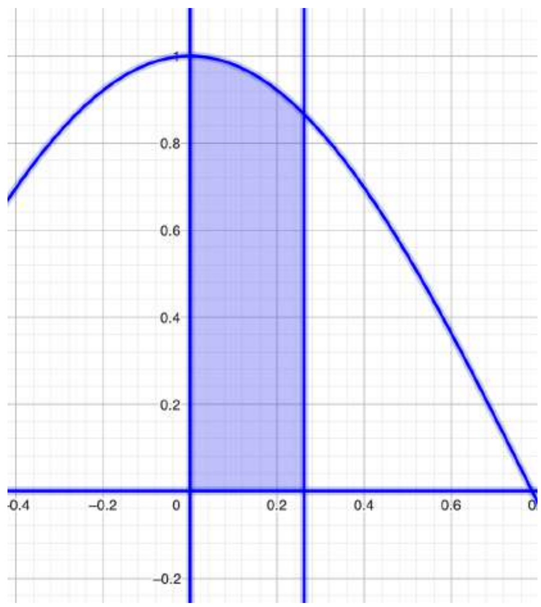


5. (1 punto) Determinar un valor de $a \in [0, \frac{\pi}{4}]$ sabiendo que el área encerrada por el gráfico de la función $f(x) = \cos(2x)$, el eje y, el eje x y la recta $x = a$ es $\dfrac{1}{4}$.

$a =$............$\dfrac{\pi}{12}$..........................

Resolución:

El planteo del problema es $\displaystyle\int_0^a \cos(2x)\,dx = \frac{1}{4}$, integrando tenemos $\displaystyle\frac{1}{2}\,\mathrm{sen}(2x)\Big|_0^a = \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}(2a)$ por lo tanto, igualando al área del dato tenemos $\mathrm{sen}(2a) = \dfrac{1}{2} \longrightarrow 2a = \dfrac{\pi}{6}$, entonces $a = \dfrac{\pi}{12}$.



6. (2 puntos) Calcular $\displaystyle\int \frac{\sqrt{3x} - 2x^3\cos(x)}{x^2}dx =$

............$-2\sqrt{3}x^{-\frac{1}{2}} - 2x\,\mathrm{sen}(x) - 2\cos(x) + C$....................................

Resolución:

$$\int \frac{\sqrt{3x} - 2x^3 cos(x)}{x^2}dx = \int \frac{\sqrt{3}\sqrt{x}}{x^2}dx - \int \frac{2x^3\cos(x)}{x^2}dx = \sqrt{3}\int x^{-\frac{3}{2}}dx - 2\int x\cos(x)dx =$$
$$-2\sqrt{3}x^{-\frac{1}{2}} - 2x\,\mathrm{sen}(x) - 2\cos(x) + C$$