ANÁLISIS MATEMÁTICO A (INGENIERIA Y CS. EXACTAS)(66) -Cátedra Cabana

SEGUNDO PARCIAL - 5/11/2024 - TEMA 2

1. Sea f una función con derivada continua que satisface $f(5) = 2$ y $\int_0^5 t.f(t)dt = 5$.

   Se quiere determinar el valor de $A = \int_0^{125} f'(x^{\frac{1}{3}})dx$

   a) (1 punto) Escribir la integral A en función de la variable $y = x^{\frac{1}{3}}$ (cambio de variable):

   ....$3\int_0^5 f'(y).y^2 dy$ ....

   b) (1 punto) Calcular $A = \int_0^{125} f'(x^{\frac{1}{3}})dx =$................120..................................

   Resolución:

   Si se realiza el cambio de variable $y = x^{\frac{1}{3}}$ se obtiene $\int_0^5 f'(y) \cdot 3 \cdot y^2 dy = 3\int_0^5 f'(y) \cdot y^2 dy$;

   ahora se puede aplicar el método de integración por partes:
   $3\left(y^2 f(y)\Big|_0^5 - \int_0^5 2yf(y)dy\right) = 3\left(25 \cdot f(5) - 2\int_0^5 y \cdot f(y)dy\right) = 3(25 \cdot 2 - 2. \cdot 5) = 3 \cdot 40 =$ 120

2. Sea la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^3}(x-3)^n$.

   a) (1 punto) Determinar el radio de convergencia de la serie: ..$\frac{1}{5}$...

   b) (1 punto) Determinar todos los $x \in \mathbb{R}$ para los cuales la serie es convergente.

   - ☐ $\left[\frac{14}{5}; \frac{16}{5}\right)$
   - ☐ $\left(\frac{14}{5}; \frac{16}{5}\right]$
   - ■ $\left[\frac{14}{5}; \frac{16}{5}\right]$
   - ☐ $\left(\frac{14}{5}; \frac{16}{5}\right)$

   Resolución:

   Aplicando el método de la raíz: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left| \frac{5^n}{n^3}(x-3)^n \right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{5}{\sqrt[n]{n^3}} \mid x-3 \mid = 5 \mid x-3 \mid$ pedimos que esta expresión sea menor que 1,

$\mid x-3 \mid < \dfrac{1}{5} \quad \longrightarrow \quad x \in \left(\dfrac{14}{5}; \dfrac{16}{5}\right)$ y el radio de convergencia es $\dfrac{1}{5}$

Ahora se analizan los extremos del intervalo: si $x = \dfrac{16}{5} \quad \longrightarrow \quad \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^3}\left(\frac{16}{5}-3\right)^n =$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^3}(\frac{1}{5})^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ serie convergente.

si $x = \dfrac{14}{5} \quad \Longrightarrow \quad \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^3}\left(\frac{14}{5}-3\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^3}(-\frac{1}{5})^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3}$ serie convergente absolutamente

La serie converge en $\left[\dfrac{14}{5}; \dfrac{16}{5}\right]$

3. (2 puntos) Hallar $a \in \mathbb{R}_{>0}$ para que el área encerrada entre el eje x, el gráfico de la función $f(x) = a.\sqrt{x}$ y la recta $x = 1$ sea igual a 4.

   $a =$.................6...................................

   Resolución:

   $$\int_0^1 a\sqrt{x}dx = ax^{\frac{3}{2}}.\frac{2}{3}\Big|_0^1 = a.\frac{2}{3} = 4 \quad \Longrightarrow a = 6$$

4. Sea la función $f(x) = 4\ln(g(x)) + 3x^2$. Si $P(x) = 1 + 9(x+1) + 40(x+1)^2$ es el polinomio de Taylor de orden 2 de la función $g(x)$ en $x_0 = -1$

   a) (1 punto) calcular $f'(x) =$...................$4.\dfrac{g'(x)}{g(x)} + 6x$ ....(dar la respuesta en funcion de g).

   b) (1 punto) calcular $f'(-1) =$............30....................

   Resolución:

   Para calcular $f'(x)$ tener en cuenta la composición en el primer término.

   Del polinomio sabemos: $P(-1) = 1 = g(-1)$, $P'(x) = 9 + 80(x+1)$ entonces $P'(-1) = 9 = g'(-1)$ por lo tanto $f'(-1) = \dfrac{4}{1}{,}9 - 6 = 30$.

5. (1 punto) La integral $\displaystyle\int (\sec(2x)\tan(2x))dx$ es igual a:

   ☐ $\dfrac{1}{2}\cot(2x) + C$

- ☐ $\frac{1}{2}\tan(2x) + C$
- ☐ $\frac{1}{2}\csc(2x) + C$
- ■ $\frac{1}{2}\sec(2x) + C$

Resolución:

$\int (\sec(2x)\tan(2x))dx = \int \frac{1}{\cos(2x)}.\frac{\operatorname{sen}(2x)}{\cos(2x)}dx$ con el cambio de variable: $u = \cos(2x)$ se llega al resultado.

6. (1 punto) La integral definida que calcula el área encerrada por el gráfico de la función $f(x) = 4\ln(\frac{x}{7}) - 1$, el eje x y la recta $x = 7e$ es:

- ■ $\int_{7e^{\frac{1}{4}}}^{7e} (4\ln(\frac{x}{7}) - 1)dx$
- ☐ $\int_{3}^{7e} (4\ln(\frac{x}{7}) - 1)dx$
- ☐ $\int_{0}^{7e} (4\ln(\frac{x}{7}) - 1)dx$
- ☐ $\int_{0}^{7e^{\frac{1}{4}}} (1 - 4\ln(\frac{x}{7}))dx + \int_{7e^{\frac{1}{4}}}^{7e} (4\ln(\frac{x}{7}) - 1)dx$

Resolución:

Se debe calcular dónde la función corta al eje x: $4\ln(\frac{x}{7}) - 1 = 0 \quad \longrightarrow \ln(\frac{x}{7}) = \frac{1}{4} \quad \to x = 7e^{\frac{1}{4}}$