APELLIDO:	CALIFICACIÓN:
NOMBRE:	
DNI (registrado en SIU Guaraní):	
E-MAIL:	DOCENTE (nombre y apellido):
TEL:	
AULA:	

Tabla de uso exclusivo para el docente

	1	2	3	4
Puntaje de cada ejercicio	2,50	2,50	2,50	2,50

Duración del examen: 1h 40'. Completar los datos personales con letra clara, mayúscula e imprenta.

No se aceptarán respuestas en lápiz.

1. Si $\int_0^2 f(x)dx = -2$; $\int_2^4 f(x)dx = 5$; $\int_0^2 g(x)dx = -1$ y $\int_2^4 g(x)dx = 3$, calcular $\int_0^4 [3f(x) - 2g(x) + 2]dx$ aplicando las propiedades de la integral definida.

Para resolver esta integral, aplicamos las propiedades de la integral definida:

$$\int_0^4 [3f(x) - 2g(x) + 2]dx$$

$$\int_0^4 3f(x)dx - \int_0^4 2g(x)dx + \int_0^4 2dx$$

$$3\int_0^4 f(x)dx - 2\int_0^4 g(x)dx + \int_0^4 2dx$$

Gracias a los datos del enunciado y a las propiedades de la integral definida podemos plantear $\int_0^4 f(x)dx = \int_0^2 f(x)dx + \int_2^4 f(x)dx$ y $\int_0^4 g(x)dx = \int_0^2 g(x)dx + \int_2^4 g(x)dx$. El último término de esta expresión es una integral inmediata:

$$3\underbrace{\int_0^4 f(x)dx}_{\int_0^2 f(x)dx + \int_2^4 f(x)dx} - 2\underbrace{\int_0^4 g(x)dx}_{\int_0^2 g(x)dx + \int_2^4 g(x)dx} + 2\int_0^4 dx$$

$$3(-2+5) - 2(-1+3) + 2x\Big|_0^4$$

Reemplazamos y aplicamos la regla de Barrow

$$3.3 - 2.2 + 8 = 13$$

2. Hallar el/los valores de $a \in R$ (si existen) para los cuales el sistema resulta incompatible

$$\begin{cases} \boldsymbol{x+y+z=a-1} \\ \boldsymbol{2x+y+az=a} \\ \boldsymbol{x+ay+z=1} \end{cases}$$

En principio, notemos que el sistema puede reescribirse en forma matricial de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-1 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}$$

Para resolverlo, emplearemos el método de eliminación de Gauss sobre la matriz ampliada (ver apunte de cátedra *"Sistemas lineales y matrices"*):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a-1 \\ 2 & 1 & a & a \\ 1 & a & 1 & 1 \end{array}\right) \quad \boldsymbol{2F_1 - F_2 \to F_2} \text{ y } \boldsymbol{F_1 - F_3 \to F_3} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a-1 \\ 0 & 1 & 2-a & a-2 \\ 0 & 1-a & 0 & a-2 \end{array}\right)$$

$$\boldsymbol{(1-a)F_2 - F_3 \to F_3} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a-1 \\ 0 & 1 & 2-a & a-2 \\ 0 & 0 & (1-a)(2-a) & (-a)(a-2) \end{array}\right) \quad (*)$$

Del análisis de la última fila de la matriz obtenida en (*) se desprende directamente que para que el sistema resulte incompatible debe ser:

$(1-a)(2-a) = 0 \ \ y \ \ (-a)(a-2) \neq 0$ $(*_2)$

Ahora bien, $(1-a)(2-a) = 0 \ \to a = 1 \ o \ \ a = 2$

Sin embargo, si $a = 2$: $(-a)(a-2) = (-2)(2-2) = 0$ y por lo tanto el sistema sería compatible indeterminado en este caso.

Por otra parte, es inmediato verificar que para cualquier otro valor de a distinto de los contemplados anteriormente, el sistema resulta compatible determinado.

Luego, del análisis conjunto de las condiciones planteadas en $(*_2)$ concluimos que **el único valor real de a tal que el sistema resulta incompatible es $a = 1$**

3. Hallar el valor de $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{x\to 2}[3f(x) + ax - 1] = 6$ sabiendo que $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = -1$

Aplicando las propiedades de límite:

$$\lim_{x\to 2}[3f(x) + ax - 1] = 6 \;\Longrightarrow\; \lim_{x\to 2} 3f(x) + \lim_{x\to 2}(ax - 1) = 6$$

$$3.\lim_{x\to 2} f(x) + \lim_{x\to 2}(ax - 1) = 6$$

Utilizando el dato del enunciado y calculando el límite:

$$3.(-1) + (2a - 1) = 6 \;\Longrightarrow -3 + 2a - 1 = 6 \;\Longrightarrow\; 2a = 10 \;\Longrightarrow\; a = 5$$

4. Hallar los valores de $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$, para los cuales $\boldsymbol{f(x) = (x+3)^2 - 1 > 0}$.

$$(x+3)^2 - 1 > 0$$

$$(x+3)^2 > 1$$

$$|x+3| > \sqrt{1}$$

$$|x+3| > 1$$

$$x + 3 < -1 \quad \vee \quad x + 3 > 1$$

$$x < -1 - 3 \quad \vee \quad x > 1 - 3$$

$$x < -4 \quad \vee \quad x > -2$$

$Solución$: $(-\infty; -4) \cup (-2; +\infty)$