APELLIDO:	CALIFICACIÓN:
NOMBRE:	
DNI (registrado en SIU Guaraní):	
E-MAIL:	DOCENTE (nombre y apellido):
TEL:	
AULA:	

Tabla de uso exclusivo para el docente

	1	2	3	4
Puntaje de cada ejercicio	2,50	2,50	2,50	2,50

Duración del examen: 1h 30'. Completar los datos personales con letra clara, mayúscula e imprenta.

No se aceptarán respuestas en lápiz.

1. Dada la función $f(x) = \frac{x+2}{x^2+x-a}$ determinar $a \in \mathbb{R}$ para que $x = 1$ sea asíntota vertical de f. Hallar las ecuaciones de todas las asíntotas verticales.

Para resolver este ejercicio usaremos lo visto en el apartado de "Límites".

Para que haya una asíntota vertical en x=1 el límite de la función cuando x tiende a 1, debe tender a infinito.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x+2}{x^2+x-a} = \infty$$

Y, como el numerador tiende a 3, para que ocurra que el límite tienda a infinito, el denominador debe tender a 0. Entonces, debemos hallar el valor de a tal que el denominador sea cero cuando $x = 1$.

$$1^2 + 1 - a = 0$$
$$2 - a = 0$$
$$2 = a$$

Ahora, para hallar las ecuaciones de todas las asíntotas verticales, debemos ver si hay algún otro valor que haga cero al denominador.

$$x^2 + x - 2 = 0$$

Para esto, utilizaremos la fórmula resolvente sabiendo que $a = 1, b = 1 \; y \; c = -2$:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

$$x_1 = \frac{-1+\sqrt{1^2-4\cdot 1\cdot(-2)}}{2\cdot 1} \text{ o } x_2 = \frac{-1-\sqrt{1^2-4\cdot 1\cdot(-2)}}{2\cdot 1}$$

$$x_1 = \frac{-1+\sqrt{9}}{2} \text{ o } x_2 = \frac{-1-\sqrt{9}}{2}$$

$$x_1 = \frac{-1+3}{2} \text{ o } x_2 = \frac{-1-3}{2}$$

$$x_1 = 1 \text{ o } x_2 = -2$$

Ya sabemos que en $x = 1$ hay una asíntota vertical, veamos si también hay en $x = -2$. Para eso, veamos a qué tiende el límite:

$$\lim_{x\to -2} \frac{x+2}{x^2+x-2} = \frac{0}{0}$$

Este límite es indeterminado. Para resolverlo, debemos factorizar al polinomio del denominador. Como ya tenemos los valores que hacen cero a ese polinomio, podemos escribir su forma factorizada:

$$\lim_{x\to -2} \frac{x+2}{(x-1)\cdot(x-(-2))} =$$

$$\lim_{x\to -2} \frac{x+2}{(x-1)\cdot(x+2)} =$$

Podemos simplificar las expresiones de $x+2$, y nos queda:

$$\lim_{x\to -2} \frac{1}{x-1} = -\frac{1}{3}$$

Este límite no tiende a infinito, por lo tanto en x=-2 no hay asíntota vertical.

La ecuación de la única asíntota vertical es $x=1$

2. Dados los puntos $P = (a; 3)$ y $Q = (2; -1)$, hallar todos los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los cuales la distancia entre P y Q sea igual a 5.

Para resolver este ejercicio usaremos la fórmula de distancia entre puntos, vista en el apartado “Distancia entre puntos”.

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

Si tomamos a P como punto 1 y a Q como punto 2, reemplazando en la fórmula obtenemos:

$$5^2 = (2 - a)^2 + (-1 - 3)^2$$

$$25 = (2 - a)^2 + 16$$

$$25 - 16 = (2 - a)^2$$

$$9 = (2 - a)^2$$

$$\sqrt{9} = |2 - a|$$

$$3 = |2 - a|$$

Entonces,

$$3 = 2 - a \quad o \quad -3 = 2 - a$$

$$a = 2 - 3 \quad o \quad a = 2 + 3$$

$$a = -1 \quad o \quad a = 5$$

3. Determinar el dominio de la función

$$\boldsymbol{g(x) = \log_2(x+1)}$$

y el conjunto de ceros $\boldsymbol{C^0}$ de la función $\boldsymbol{g^{-1}(x)}$

Para hallar el domino de g debemos tener presente que al tratarse de una función logarítmica su argumento debe ser estrictamente mayor que cero pues de otra manera no quedaría bien definida.

Luego, planteamos: $x+1>0 \to x>-1$ y por lo tanto $\boldsymbol{Dom_g = (-1; +\infty)}$

Por otra parte, una forma de obtener el conjunto de ceros de g^{-1} consiste en determinar previamente la expresión que la define:

$$y = log_2(x+1)$$

$$2^y = x+1$$

$$2^y - 1 = x$$

De donde $\boldsymbol{g^{-1}(x) = 2^x - 1}$

Por último, sabiendo que $C^0_{g^{-1}} = \{x \in Dom_{g^{-1}} | g^{-1}(x) = 0\}$ resulta: $C^0_{g^{-1}} = \{x \in Dom_{g^{-1}} | 2^x - 1 = 0\}$

Siendo que $2^x - 1 = 0 \to 2^x = 1 \to 2^x = 2^0 \to x = 0$ concluimos que $\boldsymbol{C^0_{g^{-1}} = \{0\}}$

Sin embargo, existe una manera más sencilla de obtener $C^0_{g^{-1}}$. Por ser g^{-1} y g inversas una en relación con la otra, sus gráficas resultan simétricas respecto a la recta $y = x$. Por ello, si $g(a) = b$ entonces $g^{-1}(b) = a$ por definición.

En particular, si $g^{-1}(a) = 0$, es decir, si "a" pertenece al conjunto de ceros de g^{-1}, entonces debe ser $g(0) = a$. Luego, dado que ya contamos con la expresión de g buscamos $g(0) = \log_2(0+1) \to g(0) = \log_2(1) \to g(0) = 0$ y de aquí concluimos directamente que $C^0_{g^{-1}} = \{0\}$.

En este ejercicio abordamos el estudio de las funciones exponencial y logarítmica, sus principales características y propiedades y el concepto de función inversa. Pueden encontrar ejemplos de ejercicios resueltos y otros materiales de estudio referidos a estos temas en las sesiones 3 y 5 del Campus Virtual.

4. Hallar el conjunto de positividad (C^+) del polinomio $P(x) = x^4 - 2x^3 - 8x^2$

Para resolver este ejercicio utilizaremos los contenidos vistos en el apartado “Funciones (introducción)”

Primero, debemos hallar los ceros o raíces del polinomio. Para ello, lo factorizamos.

$P(x) = x^2 \cdot (x^2 - 2x - 8)$ (sacando factor común x^2)

Ahora, debemos factorizar la expresión cuadrática que nos quedó en el paréntesis. Para ello, utilizamos la fórmula resolvente.

Sabiendo que $a = 1, b = -2$ y $c = -8$:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

$$x_1 = \frac{-(-2)+\sqrt{(-2)^2-4\cdot 1\cdot(-8)}}{2\cdot 1} \text{ o } x_2 = \frac{-(-2)-\sqrt{(-2)^2-4\cdot 1\cdot(-8)}}{2\cdot 1}$$

$$x_1 = \frac{2+\sqrt{36}}{2} \text{ o } x_2 = \frac{2-\sqrt{36}}{2}$$

$$x_1 = \frac{2+6}{2} \text{ o } x_2 = \frac{2-6}{2}$$

$$x_1 = 4 \text{ o } x_2 = -2$$

Por ende, $P(x) = x^2 \cdot (x + 2) \cdot (x - 4)$

Entonces, las raíces del polinomio se encuentran en x=-2, x=0 y en x=4

Para ver en qué intervalos el polinomio es positivo, utilizamos el Teorema de Bolzano:

	$(-\infty; -2)$	-2	$(-2; 0)$	0	$(0; 4)$	4	$(4; +\infty)$
$P(x)$	$P(-3) = (-3)^4 - 2 \cdot (-3)^3 - 8 \cdot (-3)^2$ $P(-3) = 81 - 2 \cdot (-27) - 8 \cdot 9$ $P(-3) = 81 + 54 - 72$ $P(-3) = 63$ En este intervalo la función es positiva	*0*	$P(-1) = (-1)^4 - 2 \cdot (-1)^3 - 8 \cdot (-1)^2$ $P(-1) = 1 - 2 \cdot (-1) - 8 \cdot 1$ $P(-1) = 1 + 2 - 8$ $P(-1) = -5$ En este intervalo la función es negativa	*0*	$P(1) = (1)^4 - 2 \cdot (1)^3 - 8 \cdot (1)^2$ $P(1) = 1 - 2 \cdot 1 - 8 \cdot 1$ $P(-1) = -9$ En este intervalo la función es negativa	*0*	$P(5) = (5)^4 - 2 \cdot (5)^3 - 8 \cdot (5)^2$ $P(5) = 625 - 2 \cdot 125 - 8 \cdot 25$ $P(5) = 625 - 250 - 200$ $P(5) = 175$ En este intervalo la función es positiva

Por lo tanto: $C^+ = (-\infty; -2) \cup (4; +\infty)$