

12/07/2023

TEMA 1

Hoja 1 de 4

APELLIDO:	CALIFICACIÓN:
NOMBRE:	
DNI (registrado en SIU Guaraní):	DOCENTE (nombre y apellido):
E-MAIL:	
TEL:	
AULA:	

Tabla de uso exclusivo para el docente

	1	2	3	4
Puntaje de cada ejercicio	2,50	2,50	2,50	2,50

Duración del examen: 1h 40'. Completar los datos personales con letra clara, mayúscula e imprenta.

No se aceptarán respuestas en lápiz.

1. Calcular la siguiente integral $\int (x \cdot \sqrt{x^2 + 5}) dx$

Para resolver estos ejercicios se tendrán en cuenta los temas abordados durante todo el cuatrimestre: Funciones- Operaciones con polinomios- Integrales inmediatas- Integrales por sustitución.

Designamos a: $t = x^2 + 5$ y luego derivamos la expresión:

$$dt = 2x dx$$

$$\frac{dt}{2} = x dx$$

Vemos que:

$$\int x \cdot \sqrt{x^2 + 5} dx = \int \sqrt{t} \frac{dt}{2}$$

$$\int x \cdot \sqrt{x^2 + 5} dx = \frac{1}{2} \int t^{1/2} dt$$

$$\int x \cdot \sqrt{x^2 + 5} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{3/2}}{\frac{3}{2}} + C$$

Volvemos a realizar la sustitución correspondiente y nos queda:

$$\int x \cdot \sqrt{x^2 + 5} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} (x^2 + 5)^{\frac{3}{2}} + C$$

Por lo tanto:

$$\int x \cdot \sqrt{x^2 + 5} dx = \frac{1}{3} \cdot (x^2 + 5)^{\frac{3}{2}} + C$$

APELLIDO Y NOMBRE:

DNI:

TEMA 1
Hoja 2 de 4

2. Encontrar el/los valores de $k \in \mathbb{R}$ para que el $|A| = 7$ si $A = \begin{pmatrix} k & 3 \\ 1 & k+3 \end{pmatrix}$

Hallamos el determinante de $A = k(k+3) - 3 = k^2 + 3k - 3$

$$(k^2 + 3k - 3 = 7) \rightarrow (k^2 + 3k - 10 = 0) \rightarrow k = 2, k = -5$$

Referencia: Unidad 9: Sistema de ecuaciones y matrices

3. Dada $f(x) = e^{-x^3+21x}$, determinar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, y los máximos y mínimos relativos.

Lo primero que necesitamos conocer es el dominio de la función. Como su expresión no presenta ninguna restricción, el dominio es $Dom(f) = \mathbb{R}$.

Para hallar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, analizamos el signo de la derivada.

$f'(x) = e^{-x^3+21x} \cdot (-3x^2 + 21)$. Notamos que para hallar la derivada aplicamos la regla de la cadena por tratarse de una función compuesta, y que el dominio de esta coincide con el dominio de la función original. Utilizamos ahora el teorema de Bolzano aplicado a f' para saber cómo varía su signo en su dominio.

Calculamos el conjunto de ceros de f' :

$$e^{-x^3+21x} \cdot (-3x^2 + 21) = 0$$

Como la exponencial siempre toma valores positivos, la ecuación anterior es equivalente a

$$-3x^2 + 21 = 0$$

$$-x^2 + 7 = 0$$

$$|x| = \sqrt{7}$$

$$x = \sqrt{7}, x = -\sqrt{7}$$

Luego, el conjunto de ceros de la derivada es $C_0(f') = \{-\sqrt{7}; \sqrt{7}\}$.

Evaluamos f' en algún punto del conjunto $(-\infty; -\sqrt{7})$ para ver su signo:

$$f'(-3) = e^{27-63} \cdot (-3 \cdot 9 + 21) < 0, \text{ luego, } f' \text{ es negativa en } (-\infty; -\sqrt{7}).$$

Análogamente, en el intervalo $(-\sqrt{7}; \sqrt{7})$:

$$f'(0) = e^0 \cdot (0 + 21) = 21 > 0, \text{ por lo que } f' \text{ es positiva en } (-\sqrt{7}; \sqrt{7}).$$

En $(\sqrt{7}; +\infty)$ la derivada es nuevamente negativa ya que, por ejemplo,

$$f'(3) = e^{-27+63} \cdot (-3 \cdot 9 + 21) < 0.$$

De esta forma, por el criterio de la derivada el intervalo de crecimiento de la función f es $(-\sqrt{7}; \sqrt{7})$ y los intervalos de decrecimiento son $(-\infty; -\sqrt{7})$ y $(\sqrt{7}; +\infty)$. Además, como la función decrece a la izquierda de $-\sqrt{7}$ y crece a su derecha, entonces $x = -\sqrt{7}$ es un mínimo relativo; y como f crece a la izquierda de $\sqrt{7}$ y decrece a su derecha, la abscisa $x = \sqrt{7}$ es un máximo relativo.

4. ¿Cuántas palabras distintas, con o sin sentido, se pueden formar con las letras de la palabra "SOMBRAS" si deben terminar con la letra "O"?

Buscamos utilizar las 7 letras de la palabra "SOMBRAS" para armar los nuevos vocablos (independientemente de si éstos tienen o no sentido en nuestro idioma). Por otra parte, importa el orden en que se eligen las letras para formar dichos términos. Luego, estamos ante un caso de permutación o reordenamiento de elementos.

Siendo además que buscamos palabras que finalizan con la letra "O", en lugar de permutar los 7 caracteres disponibles, debemos reordenar solo 6 de ellos, aquellos que justamente ocupan las posiciones 1 a 6 dentro de cada nueva palabra.

Por otra parte, recordemos que:

Quando en los n elementos existen elementos repetidos (un elemento aparece a veces, otro aparece b veces, otro c veces, y el último r veces, verificándose que $a + b + c + \dots + r = n$ las permutaciones reciben el nombre de permutaciones con repetición.

Su número se obtiene mediante la fórmula:

$$P_n^{a,b,c,\dots,r} = \frac{n!}{a! \cdot b! \cdot c! \cdot \dots \cdot r!}$$

Luego, como hay 2 letras "S" disponibles entre las 6 a reordenar, tendremos:

$$P_6^{2,1,1,1,1} = \frac{6!}{2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!} = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$$

palabras distintas que pueden formarse con las 7 letras de la palabra "SOMBRAS" y que además terminan con la letra "O".