

03/05/2024

TEMA 3

Hoja 1 de 4

APELLIDO:	CALIFICACIÓN:
NOMBRE:	
DNI (registrado en SIU Guarani):	
E-MAIL:	
TEL:	
AULA:	DOCENTE (nombre y apellido):

Tabla de uso exclusivo para el docente

	1	2	3	4
Puntaje de cada ejercicio	2,50	2,50	2,50	2,50

Duración del examen: 1h 30'. Completar los datos personales con letra clara, mayúscula e imprenta.

No se aceptarán respuestas en lápiz.

1. Dada la función $f(x) = \frac{x+2}{x^2+x-a}$ determinar $a \in \mathbb{R}$ para que $x = 1$ sea asíntota vertical de f . Hallar las ecuaciones de todas las asíntotas verticales.

Para resolver este ejercicio usaremos lo visto en el apartado de "Límites".

Para que haya una asíntota vertical en $x=1$ el límite de la función cuando x tiende a 1, debe tender a infinito.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{x^2+x-a} = \infty$$

Y, como el numerador tiende a 3, para que ocurra que el límite tienda a infinito, el denominador debe tender a 0. Entonces, debemos hallar el valor de a tal que el denominador sea cero cuando $x = 1$.

$$1^2 + 1 - a = 0$$

$$2 - a = 0$$

$$2 = a$$

Ahora, para hallar las ecuaciones de todas las asíntotas verticales, debemos ver si hay algún otro valor que haga cero al denominador.

$$x^2 + x - 2 = 0$$

Para esto, utilizaremos la fórmula resolvente sabiendo que $a = 1, b = 1$ y $c = -2$:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} \text{ o } x_2 = \frac{-1 - \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1}$$

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{9}}{2} \text{ o } x_2 = \frac{-1 - \sqrt{9}}{2}$$

$$x_1 = \frac{-1 + 3}{2} \text{ o } x_2 = \frac{-1 - 3}{2}$$

$$x_1 = 1 \text{ o } x_2 = -2$$

Ya sabemos que en $x = 1$ hay una asíntota vertical, veamos si también hay en $x = -2$. Para eso, veamos a qué tiende el límite:

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{x^2+x-2} = \frac{0}{0}$$

Este límite es indeterminado. Para resolverlo, debemos factorizar al polinomio del denominador. Como ya tenemos los valores que hacen cero a ese polinomio, podemos escribir su forma factorizada:

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{(x-1) \cdot (x-(-2))} =$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{(x-1) \cdot (x+2)} =$$

Podemos simplificar las expresiones de $x + 2$, y nos queda:

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{x - 1} = -\frac{1}{3}$$

Este límite no tiende a infinito, por lo tanto en $x=-2$ no hay asíntota vertical.

La ecuación de la única asíntota vertical es $x = 1$

APELLIDO Y NOMBRE:

DNI:

TEMA 3
Hoja 2 de 4

2. Dados los puntos $P = (a; 3)$ y $Q = (2; -1)$, hallar todos los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los cuales la distancia entre P y Q sea igual a 5.

Para resolver este ejercicio usaremos la fórmula de distancia entre puntos, vista en el apartado "Distancia entre puntos".

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

Si tomamos a P como punto 1 y a Q como punto 2, reemplazando en la fórmula obtenemos:

$$5^2 = (2 - a)^2 + (-1 - 3)^2$$

$$25 = (2 - a)^2 + 16$$

$$25 - 16 = (2 - a)^2$$

$$9 = (2 - a)^2$$

$$\sqrt{9} = |2 - a|$$

$$3 = |2 - a|$$

Entonces,

$$3 = 2 - a \quad o \quad -3 = 2 - a$$

$$a = 2 - 3 \quad o \quad a = 2 + 3$$

$$a = -1 \quad o \quad a = 5$$

3. Dada la función lineal $f(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$ escribir como intervalo o como unión de intervalos al conjunto

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \text{ tal que } \frac{f(x)}{x} \leq 0 \right\}$$

Para resolver este ejercicio utilizaremos lo visto en el apartado de "Intervalos" y "Ecuaciones e Inecuaciones".

Primero, reemplazamos la expresión de $f(x)$ en la inecuación:

$$\frac{-\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}}{x} \leq 0$$

Ahora, debemos pensar cuándo una división resulta ser menor o igual que cero. Esto sucede cuando los signos de los valores son distintos (en el caso del numerador, puede ser 0).

Entonces tendremos dos opciones:

$$\left(-\frac{1}{2}x + \frac{7}{2} \leq 0 \quad y \quad x > 0 \right) \quad o \quad \left(-\frac{1}{2}x + \frac{7}{2} \geq 0 \quad y \quad x < 0 \right)$$

$$\left(\frac{7}{2} \leq \frac{1}{2}x \quad y \quad x > 0 \right) \quad o \quad \left(\frac{7}{2} \geq \frac{1}{2}x \quad y \quad x < 0 \right)$$

$$\left(\frac{7}{2} : \frac{1}{2} \leq x \quad y \quad x > 0 \right) \quad o \quad \left(\frac{7}{2} : \frac{1}{2} \geq x \quad y \quad x < 0 \right)$$

$$(7 \leq x \quad y \quad x > 0) \quad o \quad (7 \geq x \quad y \quad x < 0)$$

En el primer caso, el intervalo resultante es el $[7; +\infty)$ y en el segundo caso el intervalo resultante es el $(-\infty; 0)$.

Por lo tanto la respuesta es: $A = (-\infty; 0) \cup [7; +\infty)$

4. Hallar el conjunto de positividad (C^+) del polinomio $P(x) = x^4 - 2x^3 - 8x^2$

Para resolver este ejercicio utilizaremos los contenidos vistos en el apartado "Funciones (introducción)"

Primero, debemos hallar los ceros o raíces del polinomio. Para ello, lo factorizamos.

$$P(x) = x^2 \cdot (x^2 - 2x - 8) \text{ (sacando factor común } x^2)$$

Ahora, debemos factorizar la expresión cuadrática que nos quedó en el paréntesis. Para ello, utilizamos la fórmula resolvente.

Sabiendo que $a = 1, b = -2$ y $c = -8$:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

$$x_1 = \frac{-(-2) + \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8)}}{2 \cdot 1} \text{ o } x_2 = \frac{-(-2) - \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8)}}{2 \cdot 1}$$

$$x_1 = \frac{2 + \sqrt{36}}{2} \text{ o } x_2 = \frac{2 - \sqrt{36}}{2}$$

$$x_1 = \frac{2 + 6}{2} \text{ o } x_2 = \frac{2 - 6}{2}$$

$$x_1 = 4 \text{ o } x_2 = -2$$

Por ende, $P(x) = x^2 \cdot (x + 2) \cdot (x - 4)$

Entonces, las raíces del polinomio se encuentran en $x=-2, x=0$ y en $x=4$

Para ver en qué intervalos el polinomio es positivo, utilizamos el Teorema de Bolzano:

	$(-\infty; -2)$	-2	$(-2; 0)$	0	$(0; 4)$	4	$(4; +\infty)$
$P(x)$	$P(-3)$ $= (-3)^4 - 2 \cdot (-3)^3 - 8 \cdot (-3)^2$ $P(-3) = 81 - 2 \cdot (-27) - 8 \cdot 9$ $P(-3) = 81 + 54 - 72$ $P(-3) = 63$ En este intervalo la función es positiva	0	$P(-1)$ $= (-1)^4 - 2 \cdot (-1)^3 - 8 \cdot (-1)^2$ $P(-1) = 1 - 2 \cdot (-1) - 8 \cdot 1$ $P(-1) = 1 + 2 - 8$ $P(-1) = -5$ En este intervalo la función es negativa	0	$P(1)$ $= (1)^4 - 2 \cdot (1)^3 - 8 \cdot (1)^2$ $P(1) = 1 - 2 \cdot 1 - 8 \cdot 1$ $P(1) = -9$ En este intervalo la función es negativa	0	$P(5)$ $= (5)^4 - 2 \cdot (5)^3 - 8 \cdot (5)^2$ $P(5) = 625 - 2 \cdot 125 - 8 \cdot 25$ $P(5) = 625 - 250 - 200$ $P(5) = 175$ En este intervalo la función es positiva

Por lo tanto: $C^+ = (-\infty; -2) \cup (4; +\infty)$