



TEMA 1

Ejercicio 1 (2 puntos)

Dadas las funciones

$$f(x) = x - 3 \quad ; \quad g(x) = 2(x - 5)^2 + 1$$

determinar todos los valores de $x \in \mathbb{R}$ para los cuales $(g \circ f)(x) = f(36)$

Respuesta

Primero debemos hallar la expresión de la función $g \circ f$.

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 2 \cdot (f(x) - 5)^2 + 1 = 2 \cdot ((x - 3) - 5)^2 + 1 = 2 \cdot (x - 8)^2 + 1$$

Por otro lado

$$f(36) = 36 - 3 = 33$$

Ahora debemos buscar para qué valores reales de x se verifica que

$$(g \circ f)(x) = f(36)$$

Entonces

$$2 \cdot (x - 8)^2 + 1 = 33$$

$$2 \cdot (x - 8)^2 = 32$$

$$(x - 8)^2 = 16$$

$$|x - 8| = \sqrt{16}$$

$$|x - 8| = 4 \quad \Leftrightarrow \quad x - 8 = 4 \quad \text{ó} \quad x - 8 = -4$$

$$\Leftrightarrow \quad x = 12 \quad \text{ó} \quad x = 4$$



Ejercicio 2 (3 puntos)

Dados los conjuntos

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x + 2 > 0\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} : |4 - x| \geq 5\}$$

hallar analíticamente el conjunto $A \cap B$ y representarlo en la recta real.

Respuesta

Sabemos que pertenecerán al conjunto $A \cap B$ todos aquellos números reales que pertenezcan simultáneamente a los conjuntos A y B.

$$\text{Si } x \in A \Rightarrow x + 2 > 0 \Leftrightarrow x > -2 \Leftrightarrow x \in (-2; +\infty), \text{ luego } A = (-2; +\infty)$$

$$\text{Si } x \in B \Rightarrow |4 - x| \geq 5 \Leftrightarrow 4 - x \geq 5 \text{ ó } 4 - x \leq -5$$

Analizamos por separado las dos posibilidades que surgen al plantear $|4 - x| \geq 5$

$$4 - x \geq 5 \Leftrightarrow -x \geq 1 \Leftrightarrow x \leq -1 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -1]$$

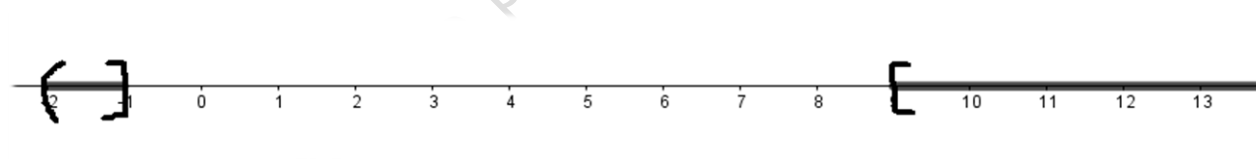
$$4 - x \leq -5 \Leftrightarrow -x \leq -9 \Leftrightarrow x \geq 9 \Leftrightarrow x \in [9; +\infty)$$

Luego $x \in B \Leftrightarrow x \in (-\infty; -1]$ ó si $x \in [9; +\infty)$, que es lo mismo que decir que

$$B = (-\infty; -1] \cup [9; +\infty)$$

Entonces

$$A \cap B = (-2; +\infty) \cap ((-\infty; -1] \cup [9; +\infty)) = (-2; -1] \cup [9; +\infty)$$





Ejercicio 3 (2 puntos)

Determinar el valor de la constante $a \in \mathbb{R}$ para que se verifique que la recta de ecuación $y = 2$ sea una asíntota horizontal de la función

$$f(x) = \frac{20x^2 - x + 7}{2ax^2 + 1}$$

Respuesta

Hallar la asíntota horizontal en $y = 2$ es, por definición, encontrar el valor de “a” tal que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{20x^2 - x + 7}{2ax^2 + 1} = 2$$

Para calcular este límite podemos sacar factor común “ x^2 ” tanto en el numerador como en el denominador para, luego de simplificar el “ x^2 ” y analizar a que tienden cada uno de los términos de la expresión obtenida.

Como

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{20x^2 - x + 7}{2ax^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \left(20 - \frac{1}{x} + \frac{7}{x^2} \right)}{x^2 \left(2a + \frac{1}{x^2} \right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{20 - \frac{1}{x} + \frac{7}{x^2}}{2a + \frac{1}{x^2}}$$

Salvo el primer término, tanto del numerador como del denominador, todos los demás tienden a cero cuando $x \rightarrow \infty$, quiere decir que:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{20x^2 - x + 7}{2ax^2 + 1} = \frac{20}{2a} = \frac{10}{a}$$

y por lo tanto

$$\frac{10}{a} = 2 \quad \Rightarrow \quad a = 5$$



Ejercicio 4 (3 puntos)

Dadas las funciones $f(x)$, $g(x)$ definidas como

$$g(x) = \frac{2x}{x-1} \quad f(x) = K \cdot g^{-1}(x)$$

hallar el valor de la constante $K \in \mathbb{R}$ sabiendo que $f(1) = 3$

Respuesta

En primer lugar debemos obtener la expresión de $g^{-1}(x)$:

$$y = \frac{2x}{x-1}$$

$$y(x-1) = 2x$$

$$yx - y = 2x$$

$$yx - 2x = y$$

$$x(y-2) = y$$

$$x = \frac{y}{y-2}$$

Luego, haciendo un cambio en el nombre de la variables

$$g^{-1}(x) = \frac{x}{x-2}$$

Entonces

$$f(x) = K \cdot \frac{x}{x-2}$$

Como

$$3 = f(1) \Leftrightarrow 3 = K \cdot \frac{1}{1-2} \Leftrightarrow K = -3$$



TEMA 2

Ejercicio 1 (2 puntos)

Determinar el valor de la constante $a \in \mathbb{R}$ para que se verifique que la recta de ecuación $y = 3$ sea una asíntota horizontal de la función

$$f(x) = \frac{36x^2 - 2x + 1}{3ax^2 + 6}$$

Respuesta

Hallar la asíntota horizontal en $y = 3$ es, por definición, encontrar el valor de “a” tal que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{36x^2 - 2x + 1}{3ax^2 + 6} = 3$$

Para calcular este límite podemos sacar factor común “ x^2 ” tanto en el numerador como en el denominador para, luego de simplificar el “ x^2 ” y analizar a que tienden cada uno de los términos de la expresión obtenida.

Como

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{36x^2 - 2x + 1}{3ax^2 + 6} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \left(36 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} \right)}{x^2 \left(3a + \frac{6}{x^2} \right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{36 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}}{3a + \frac{6}{x^2}}$$

Salvo el primer término, tanto del numerador como del denominador, todos los demás tienden a cero cuando $x \rightarrow \infty$

Quiere decir que:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{36x^2 - 2x + 1}{3ax^2 + 6} = \frac{36}{3a} = \frac{12}{a}$$

y por lo tanto

$$\frac{12}{a} = 3 \quad \Rightarrow \quad a = 4$$



Ejercicio 2 (3 puntos)

Dadas las funciones $f(x)$, $g(x)$ definidas como

$$f(x) = \frac{5x}{x-3} \quad g(x) = A \cdot f^{-1}(x)$$

hallar el valor de la constante $A \in \mathbb{R}$ sabiendo que $g(2) = 10$

Respuesta

En primer lugar debemos obtener la expresión de $f^{-1}(x)$:

$$y = \frac{5x}{x-3}$$

$$y(x-3) = 5x$$

$$yx - 3y = 5x$$

$$yx - 5x = 3y$$

$$x(y-5) = 3y$$

$$x = \frac{3y}{y-5}$$

Luego, haciendo un cambio en el nombre de la variables

$$f^{-1}(x) = \frac{3x}{x-5}$$

Entonces

$$g(x) = A \cdot \frac{3x}{x-5}$$

Como

$$10 = g(2) \Leftrightarrow 10 = A \cdot \frac{3 \cdot 2}{2-5} \Leftrightarrow 10 = A \cdot \frac{6}{-3} \Leftrightarrow A = -5$$



Ejercicio 3 (2 puntos)

Dadas las funciones

$$f(x) = x + 5 \quad ; \quad g(x) = 3(x + 1)^2 - 2$$

determinar todos los valores de $x \in \mathbb{R}$ para los cuales

$$g \circ f(x) = f(20)$$

Respuesta

Primero debemos hallar la expresión de la función $g \circ f$.

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 3 \cdot (f(x) + 1)^2 - 2 = 3 \cdot (x + 5 + 1)^2 - 2 = 3 \cdot (x + 6)^2 - 2$$

Por otro lado

$$f(20) = 20 + 5 = 25$$

Ahora debemos buscar para qué valores reales de x se verifica que

$$(g \circ f)(x) = f(20)$$

Entonces

$$3 \cdot (x + 6)^2 - 2 = 25$$

$$3 \cdot (x + 6)^2 = 27$$

$$(x + 6)^2 = 9$$

$$|x + 6| = \sqrt{9}$$

$$|x + 6| = 3 \quad \Leftrightarrow \quad x + 6 = 3 \quad \text{ó} \quad x + 6 = -3$$

$$\Leftrightarrow \quad x = -3 \quad \text{ó} \quad x = -9$$



Ejercicio 4 (3 puntos)

Dados los conjuntos

$$M = \{x \in \mathbb{R} : x + 5 < 0\}$$

$$N = \{x \in \mathbb{R} : |3 - x| \geq 2\}$$

hallar analíticamente el conjunto $M \cap N$ y representarlo en la recta real.

Respuesta

Sabemos que pertenecerán al conjunto $M \cap N$ todos aquellos números reales que pertenezcan simultáneamente a los conjuntos M y N .

$$\text{Si } x \in M \Rightarrow x + 5 < 0 \Leftrightarrow x < -5 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -5), \text{ luego } M = (-\infty; -5)$$

$$\text{Si } x \in N \Rightarrow |3 - x| \geq 2 \Leftrightarrow 3 - x \geq 2 \text{ ó } 3 - x \leq -2$$

Analizamos por separado las dos posibilidades que surgen al plantear $|3 - x| \geq 2$

$$3 - x \geq 2 \Leftrightarrow -x \geq -1 \Leftrightarrow x \leq 1 \Leftrightarrow x \in (-\infty; 1]$$

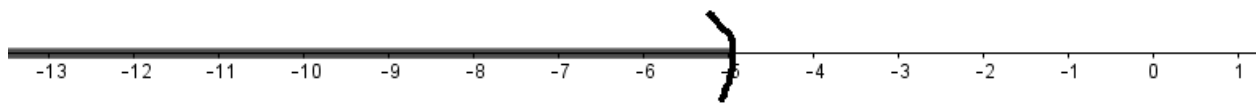
$$3 - x \leq -2 \Leftrightarrow -x \leq -5 \Leftrightarrow x \geq 5 \Leftrightarrow x \in [5; +\infty)$$

Luego $x \in N \Leftrightarrow x \in (-\infty; 1] \text{ ó } \text{si } x \in [5; +\infty)$, que es lo mismo que decir que

$$N = (-\infty; 1] \cup [5; +\infty)$$

Entonces

$$M \cap N = (-\infty; -5) \cap ((-\infty; 1] \cup [5; +\infty)) = (-\infty; -5)$$





TEMA 3

Ejercicio 1 (3 puntos)

Dados los conjuntos

$$S = \{x \in \mathbb{R} : x + 1 > 0\}$$

$$T = \{x \in \mathbb{R} : |5 - x| \geq 2\}$$

hallar analíticamente el conjunto $S \cap T$ y representarlo en la recta real.

Respuesta

Sabemos que pertenecerán al conjunto $S \cap T$ todos aquellos números reales que pertenezcan simultáneamente a los conjuntos S y T .

$$\text{Si } x \in S \Rightarrow x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -1 \Leftrightarrow x \in (-1; +\infty), \text{ luego } S = (-1; +\infty)$$

$$\text{Si } x \in T \Rightarrow |5 - x| \geq 2 \Leftrightarrow 5 - x \geq 2 \text{ ó } 5 - x \leq -2$$

Analizamos por separado las dos posibilidades que surgen al plantear $|5 - x| \geq 2$

$$5 - x \geq 2 \Leftrightarrow -x \geq -3 \Leftrightarrow x \leq 3 \Leftrightarrow x \in (-\infty; 3]$$

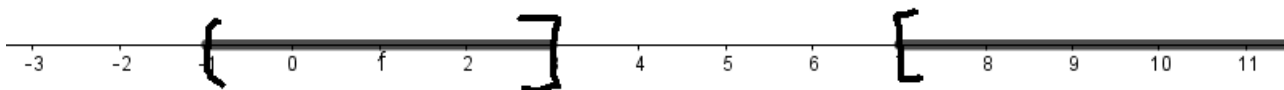
$$5 - x \leq -2 \Leftrightarrow -x \leq -7 \Leftrightarrow x \geq 7 \Leftrightarrow x \in [7; +\infty)$$

Luego $x \in T \Leftrightarrow x \in (-\infty; 3]$ ó si $x \in [7; +\infty)$, que es lo mismo que decir que

$$T = (-\infty; 3] \cup [7; +\infty)$$

Entonces

$$S \cap T = (-1; +\infty) \cap ((-\infty; 3] \cup [7; +\infty)) = (-1; 3] \cup [7; +\infty)$$





Ejercicio 2 (2 puntos)

Dadas las funciones

$$h(x) = x + 1 \quad ; \quad g(x) = 7(x - 2)^2 + 3$$

determinar todos los valores de $x \in \mathbb{R}$ para los cuales

$$g \circ h(x) = h(30)$$

Respuesta

Primero debemos hallar la expresión de la función $g \circ h$.

$$(g \circ h)(x) = g(h(x)) = 7 \cdot (h(x) - 2)^2 + 3 = 7 \cdot (x + 1 - 2)^2 + 3 = 7 \cdot (x - 1)^2 + 3$$

Por otro lado

$$h(30) = 30 + 1 = 31$$

Ahora debemos buscar para qué valores reales de x se verifica que

$$(g \circ h)(x) = h(30)$$

Entonces

$$7 \cdot (x - 1)^2 + 3 = 31$$

$$7 \cdot (x - 1)^2 = 28$$

$$(x - 1)^2 = 4$$

$$|x - 1| = \sqrt{4}$$

$$|x - 1| = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x - 1 = 2 \quad \text{ó} \quad x - 1 = -2$$

$$\Leftrightarrow \quad x = 3 \quad \text{ó} \quad x = -1$$



Ejercicio 3 (2 puntos)

Determinar el valor de la constante $a \in \mathbb{R}$ para que se verifique que la recta de ecuación $y = 4$ sea una asíntota horizontal de la función

$$f(x) = \frac{32x^2 - 3x + 5}{4ax^2 + 2}$$

Respuesta

Hallar la asíntota horizontal en $y = 4$ es, por definición, encontrar el valor de “a” tal que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{32x^2 - 3x + 5}{4ax^2 + 2} = 4$$

Para calcular este límite podemos sacar factor común “ x^2 ” tanto en el numerador como en el denominador para, luego de simplificar el “ x^2 ” y analizar a que tienden cada uno de los términos de la expresión obtenida.

Como

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{32x^2 - 3x + 5}{4ax^2 + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \left(32 - \frac{3}{x} + \frac{5}{x^2} \right)}{x^2 \left(4a + \frac{2}{x^2} \right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{32 - \frac{3}{x} + \frac{5}{x^2}}{4a + \frac{2}{x^2}}$$

Salvo el primer término, tanto del numerador como del denominador, todos los demás tienden a cero cuando $x \rightarrow \infty$

Quiere decir que:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{32x^2 - 3x + 5}{4ax^2 + 2} = \frac{32}{4a} = \frac{8}{a}$$

y por lo tanto

$$\frac{8}{a} = 4 \quad \Rightarrow \quad a = 2$$



Ejercicio 4 (3 puntos)

Dadas las funciones $f(x)$, $h(x)$ definidas como

$$h(x) = \frac{9x}{x+2} \quad f(x) = M \cdot h^{-1}(x)$$

hallar el valor de la constante $M \in \mathbb{R}$ sabiendo que $f(1) = 3$

Respuesta

En primer lugar debemos obtener la expresión de $h^{-1}(x)$:

$$y = \frac{9x}{x+2}$$

$$y(x+2) = 9x$$

$$yx + 2y = 9x$$

$$yx - 9x = -2y$$

$$x(y-9) = -2y$$

$$x = \frac{-2y}{y-9}$$

Luego, haciendo un cambio en el nombre de la variables

$$h^{-1}(x) = \frac{-2x}{x-9}$$

Entonces

$$f(x) = M \cdot \frac{-2x}{x-9}$$

Como

$$3 = f(1) \Leftrightarrow 3 = M \cdot \frac{-2 \cdot 1}{1-9} \Leftrightarrow 3 = M \cdot \frac{-2}{-8} \Leftrightarrow M = 12$$