APELLIDO:	CALIFICACIÓN:
NOMBRE:	
DNI (registrado en SIU Guaraní):	
E-MAIL:	DOCENTE (nombre y apellido):
TEL:	
AULA:	

Tabla de uso exclusivo para el docente

	1	2	3	4
Puntaje de cada ejercicio	2,50	2,50	2,50	2,50

Duración del examen: 1h 30'. Completar los datos personales con letra clara, mayúscula e imprenta.

No se aceptarán respuestas en lápiz.

1. Hallar el valor de la constante $a \in \mathbb{R}$ para que $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -1$ siendo $f(x) = \frac{ax+6x-3}{2x-1}$

Para resolver el ejercicio se tienen en cuenta los contenidos estudiados en la Unidad 3, Sesión 6, Límite de Funciones.

Cuando x crece indefinidamente (tiende a infinito) se tiene un cociente de infinitos porque tanto el numerador como el denominador tienden a infinito:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{ax+6x-3}{2x-1} \to \frac{\infty}{\infty}$$

Para resolver el límite se divide numerador y denominador por x en este caso. Luego, se distribuye y se simplifica. Entonces:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{ax+6x-3}{2x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{ax+6x-3}{x}}{\frac{2x-1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{ax}{x}+\frac{6x}{x}-\frac{3}{x}}{\frac{2x}{x}-\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{a+6-\frac{3}{x}}{2-\frac{1}{x}}$$

Cuando x crece indefinidamente, los términos $-\frac{3}{x}$ y $-\frac{1}{x}$ tienden a cero. Luego, el límite resulta:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a+6-\frac{3}{x}}{2-\frac{1}{x}} = \frac{a+6}{2}$$

Teniendo en cuenta que el resultado del límite es -1, queda una ecuación con una sola incógnita que se resuelve utilizando los procedimientos estudiados:

$$\frac{a+6}{2} = -1$$

$$a+6 = -2$$

$$a = -8$$

2. Hallar analíticamente los puntos del plano donde se cortan las funciones:

$$\boldsymbol{f(x) = x^4 + x^2 - 2x - 1 \quad , \quad g(x) = x^4 - x + 5}$$

Para resolver el ejercicio se tienen en cuenta los contenidos estudiados en la Unidad 2, Sesión 4, Polinomios.

Para obtener los puntos de corte de ambas curvas se calculan los valores de x para los cuales $f(x) = g(x)$.
Entonces:

$$x^4 + x^2 - 2x - 1 = x^4 - x + 5$$

Se resuelve la ecuación así obtenida, igualando a cero y despejando:

$$x^4 - x^4 + x^2 - 2x + x - 1 - 5 = 0$$

$$x^2 - x - 6 = 0$$

Aplicando la fórmula resolvente de la ecuación de segundo grado resulta:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4.1.(-6)}}{2.1}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2}$$

$$x = \frac{1 \pm 5}{2}$$

Entonces: $x_1 = \frac{1+5}{2} \Longrightarrow x_1 = \frac{6}{2} \Longrightarrow x_1 = 3$ y $x_2 = \frac{1-5}{2} \Longrightarrow x_2 = \frac{-4}{2} \Longrightarrow x_2 = -2$

Los valores hallados son las abscisas de los puntos de corte de ambas curvas. Para obtener sus respectivas ordenadas se elige reemplazar en cualesquiera de las dos funciones dadas, por ejemplo g , porque tiene una expresión algebraica más sencilla que facilita los cálculos. Entonces,

$$g(3) = 3^4 - 3 + 5 = 83$$

$$g(-2) = (-2)^4 - (-2) + 5 = 23$$

En definitiva, los puntos del plano donde se cortan ambas funciones son:

$$P = (3;83) \text{ y } Q = (-2;23)$$

3. Sean las funciones $f(x) = cx + 1$; $g(x) = \frac{3x}{-x+10}$ hallar el valor de la constante $c \in \mathbb{R}$ para que se cumpla que $(g \circ f)(2) = 3$

Teniendo en cuenta que, por definición, $(g \circ f)(x) = g\left[f(x)\right]$, se efectúa el cálculo de la nueva función así obtenida (según lo estudiado en la Unidad 3, Sesión 5, Composición de funciones)

$$(g \circ f)(x) = g\left[f(x)\right] = g(cx+1) = \frac{3(cx+1)}{-(cx+1)+10} = \frac{3cx+3}{-cx-1+10} = \frac{3cx+3}{-cx+9}$$

Considerando que $(g \circ f)(2) = 3$, resulta:

$$\frac{3c \cdot 2 + 3}{-c \cdot 2 + 9} = 3$$

Queda una ecuación de primer grado con una sola incógnita que se resuelve aplicando las propiedades estudiadas:

$$6c + 3 = 3(-2c + 9)$$

$$6c + 3 = -6c + 27$$

$$6c + 6c = 27 - 3$$

$$12c = 24$$

$$c = \frac{24}{12}$$

$$c = 2$$

4. Hallar la función cuadrática $g(x)$ cuyo gráfico tiene vértice en el punto $V = (1; -8)$ y que además verifica que $g(3) = -6$.

Teniendo en cuenta que g es una función cuadrática, podemos considerar que la misma puede expresarse de tres maneras diferentes:

Forma polinómica: $y = ax^2 + bx + c$

Forma canónica: $y = a(x - x_v)^2 + y_v$

Forma factorizada: $y = a(x - x_1)(x - x_2)$

En este caso, el enunciado del ejercicio provee las coordenadas del vértice, por lo que va a ser conveniente trabajar con la función cuadrática expresada en forma canónica.

Reemplazando por las coordenadas del vértice en dicha expresión se obtiene:

$$y = a(x - 1)^2 + (-8)$$

$$y = a(x - 1)^2 - 8$$

En esta expresión sólo falta conocer el valor de a para saber la fórmula de la función cuadrática solicitada. Para hacerlo, consideramos que $g(3) = -6$, es decir, que la gráfica de $g(x)$ pasa por el punto $(3; -6)$.

Reemplazando los valores de x e y por los del punto se obtiene:

$$-6 = a(3 - 1)^2 - 8$$

Esta expresión corresponde a una ecuación en la que la incógnita es a. Resolviendo y despejando:

$$-6 = a(3 - 1)^2 - 8$$

$$-6 = a(2)^2 - 8$$

$$-6 = a.4 - 8$$

$$-6 + 8 = a.4$$

$$\frac{2}{4} = a$$

$$\frac{1}{2} = a$$

Una vez calculado el valor de a, reemplazamos en la expresión de la función obteniendo la función cuadrática buscada:

$$g(x) = \frac{1}{2}(x - 1)^2 - 8$$