

10/07/2024

TEMA 1

Hoja 1 de 4

APELLIDO:	CALIFICACIÓN:
NOMBRE:	
DNI (registrado en SIU Guaraní):	
E-MAIL:	
TEL:	DOCENTE (nombre y apellido):
AULA:	

Tabla de uso exclusivo para el docente

	1	2	3	4
Puntaje de cada ejercicio	2,50	2,50	2,50	2,50

Duración del examen: 1h 40'. Completar los datos personales con letra clara, mayúscula e imprenta.

No se aceptarán respuestas en lápiz.

1. Hallar el/los valores de $a \in R$ (si existen) para los cuales el sistema resulta incompatible

$$\begin{cases} x + y + z = a - 1 \\ 2x + y + az = a \\ x + ay + z = 1 \end{cases}$$

En principio, notemos que el sistema puede reescribirse en forma matricial de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - 1 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}$$

Para resolverlo, emplearemos el método de eliminación de Gauss sobre la matriz ampliada (ver apunte de cátedra "Sistemas lineales y matrices"):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a-1 \\ 2 & 1 & a & a \\ 1 & a & 1 & 1 \end{array} \right) \quad 2F_1 - F_2 \rightarrow F_2 \text{ y } F_1 - F_3 \rightarrow F_3 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a-1 \\ 0 & 1 & 2-a & a-2 \\ 0 & 1-a & 0 & a-2 \end{array} \right)$$

$$(1-a)F_2 - F_3 \rightarrow F_3 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a-1 \\ 0 & 1 & 2-a & a-2 \\ 0 & 0 & (1-a)(2-a) & (-a)(a-2) \end{array} \right) \quad (*)$$

Del análisis de la última fila de la matriz obtenida en (*) se desprende directamente que para que el sistema resulte incompatible debe ser:

$$(1-a)(2-a) = 0 \text{ y } (-a)(a-2) \neq 0 \quad (*_2)$$

Ahora bien, $(1-a)(2-a) = 0 \rightarrow a = 1 \text{ o } a = 2$

Sin embargo, si $a = 2$: $(-a)(a-2) = (-2)(2-2) = 0$ y por lo tanto el sistema sería compatible indeterminado en este caso.

Por otra parte, es inmediato verificar que para cualquier otro valor de a distinto de los contemplados anteriormente, el sistema resulta compatible determinado.

Luego, del análisis conjunto de las condiciones planteadas en $(*_2)$ concluimos que **el único valor real de a tal que el sistema resulta incompatible es $a = 1$**

APELLIDO Y NOMBRE:

DNI:

TEMA 1
Hoja 2 de 4

2. Hallar los valores de $x \in \mathbb{R}$, para los cuales $f(x) = (x + 3)^2 - 1 > 0$.

$$(x + 3)^2 - 1 > 0$$

$$(x + 3)^2 > 1$$

$$|x + 3| > \sqrt{1}$$

$$|x + 3| > 1$$

$$x + 3 < -1 \quad \vee \quad x + 3 > 1$$

$$x < -1 - 3 \quad \vee \quad x > 1 - 3$$

$$x < -4 \quad \vee \quad x > -2$$

Solución: $(-\infty; -4) \cup (-2; +\infty)$

3. Si $\int_0^2 f(x)dx = -2$; $\int_2^4 f(x)dx = 5$; $\int_0^2 g(x)dx = -1$ y $\int_2^4 g(x)dx = 3$, calcular $\int_0^4 [3f(x) - 2g(x) + 2]dx$ aplicando las propiedades de la integral definida.

Para resolver esta integral, aplicamos las propiedades de la integral definida:

$$\begin{aligned} & \int_0^4 [3f(x) - 2g(x) + 2]dx \\ & \int_0^4 3f(x)dx - \int_0^4 2g(x)dx + \int_0^4 2dx \\ & 3 \int_0^4 f(x)dx - 2 \int_0^4 g(x)dx + \int_0^4 2dx \end{aligned}$$

Gracias a los datos del enunciado y a las propiedades de la integral definida podemos plantear $\int_0^4 f(x)dx = \int_0^2 f(x)dx + \int_2^4 f(x)dx$ y $\int_0^4 g(x)dx = \int_0^2 g(x)dx + \int_2^4 g(x)dx$. El último término de esta expresión es una integral inmediata:

$$\begin{aligned} & 3 \underbrace{\int_0^4 f(x)dx}_{\int_0^2 f(x)dx + \int_2^4 f(x)dx} - 2 \underbrace{\int_0^4 g(x)dx}_{\int_0^2 g(x)dx + \int_2^4 g(x)dx} + 2 \int_0^4 dx \\ & 3(-2 + 5) - 2(-1 + 3) + 2x \Big|_0^4 \end{aligned}$$

Reemplazamos y aplicamos la regla de Barrow

$$3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 + 8 = \mathbf{13}$$

APELLIDO Y NOMBRE:

DNI:

TEMA 1
Hoja 4 de 4

4. Hallar el valor de $a \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{x \rightarrow 2} [3f(x) + ax - 1] = 6$ sabiendo que $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -1$

Aplicando las propiedades de límite:

$$\lim_{x \rightarrow 2} [3f(x) + ax - 1] = 6 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} 3f(x) + \lim_{x \rightarrow 2} (ax - 1) = 6$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 2} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2} (ax - 1) = 6$$

Utilizando el dato del enunciado y calculando el límite:

$$3. (-1) + (2a - 1) = 6 \Rightarrow -3 + 2a - 1 = 6 \Rightarrow 2a = 10 \Rightarrow \mathbf{a = 5}$$