APELLIDO:	CALIFICACIÓN:
NOMBRE:	
DNI (registrado en SIU Guaraní):	
E-MAIL:	DOCENTE (nombre y apellido):
TEL:	
AULA:	

Tabla de uso exclusivo para el docente

	1	2	3	4
Puntaje de cada ejercicio	2,50	2,50	2,50	2,50

Duración del examen: 1h 30'. Completar los datos personales con letra clara, mayúscula e imprenta.

No se aceptarán respuestas en lápiz.

1. Hallar los valores $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$ que son solución de la siguiente inecuación $\frac{5x-4}{8-x} \leq 6$

En primer lugar, establecemos que la desigualdad $\frac{5x-4}{8-x} \leq 6$ es equivalente a la expresión $\frac{11x-52}{8-x} \leq 0$

La expresión anterior se obtuvo de realizar lo siguiente:

$$\frac{5x-4}{8-x} \leq 6 \Leftrightarrow \frac{5x-4}{8-x} - 6 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{5x-4-6\cdot(8-x)}{8-x} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{5x-4-48+6x}{8-x} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{11x-52}{8-x} \leq 0$$

En este caso para que el cociente no sea positivo existen dos posibilidades: Que el numerador sea positivo o nulo y el denominador sea negativo o que el numerador sea negativo o cero y el denominador sea positivo. Es decir:

$$(11x-52 \geq 0 \quad \wedge \quad 8-x < 0) \ \vee (11x-52 \leq 0 \quad \wedge \quad 8-x > 0)$$

Despejamos

$$\left(x \geq \frac{52}{11} \ \wedge \ 8 < x\right) \ \vee \ \left(x \leq \frac{52}{11} \ \wedge \ 8 > x\right)$$

De analizar la primera solución observamos que los valores de $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$ que verifican simultáneamente las condiciones pertenecen al intervalo $(8; +\infty)$. Con lo cual, $S_1 = (8; +\infty)$

Si se realiza el mismo análisis para la segunda solución observamos los valores de $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$ que verifican simultáneamente ambas condiciones pertenecen al intervalo $(-\infty; \frac{52}{11}]$, por lo tanto: $S_2 = (-\infty; \frac{52}{11}]$

Finalmente, el intervalo S resulta de la unión de S_1y S_2:

$$S = S_1 \cup S_2 = (-\infty; \frac{52}{11}] \ \cup \ (8; +\infty)$$

Por lo tanto,

$$S = (-\infty; \frac{52}{11}] \ \cup \ (8; +\infty)$$

Para la resolución de este ejercicio aplicamos los conceptos desarrollados en el apunte "Inecuaciones" e "Intervalos"

2. Hallar todos los valores de $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{con\ c > 0}$, tal que el punto $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{-7}; \boldsymbol{2})$ se encuentre a $\mathbf{5}$ unidades de distancia del punto $\boldsymbol{Q} = (\boldsymbol{-4}; \boldsymbol{c})$**.**

Teniendo en cuenta la fórmula correspondiente a la distancia entre dos puntos $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{x_1}; \boldsymbol{y_1})$ y $\boldsymbol{Q} = (\boldsymbol{x_2}; \boldsymbol{y_2})$:

$$\boldsymbol{d(P;Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

Planteamos la distancia entre los puntos dados:

$$\mathbf{5} = \sqrt{\big(\mathbf{-4 - (-7)}\big)^{\mathbf{2}} + (\boldsymbol{c} - \mathbf{2})^{\mathbf{2}}}$$

Elevamos al cuadrado ambos miembros y operamos algebraicamente:

$$\mathbf{25 = 9 + (\boldsymbol{c} - 2)^2}$$

$$\mathbf{16 = (\boldsymbol{c} - 2)^2}$$

Aplicamos raíz cuadrada a ambos miembros:

$$\sqrt{\mathbf{16}} = \sqrt{(\boldsymbol{c} - \mathbf{2})^{\mathbf{2}}}$$

Aplicamos propiedades de valor absoluto:

$$|\boldsymbol{c} - \mathbf{2}| = \mathbf{4}$$

$$\boldsymbol{c} - \mathbf{2} = \mathbf{4} \quad \vee \quad \boldsymbol{c} - \mathbf{2} = \mathbf{-4}$$

$$\boldsymbol{c} = \mathbf{6} \quad \vee \quad \boldsymbol{c} = \mathbf{-2}$$

Teniendo en cuenta que en el enunciado se indica que $\boldsymbol{c} > \mathbf{0}$, entonces $\boldsymbol{c} = \mathbf{6}$

Para la resolución de este ejercicio aplicamos el concepto de Distancia entre dos puntos y su fórmula, desarrollado en el apunte "Distancia entre puntos" y propiedades del valor absoluto desarrolladas en el apunte "Valor absoluto".

3. Dadas $f(x)=\frac{2x}{x+3}$, $g(x)=-x+1$ con $h=g\circ f$, determinar $h^{-1}(x)$ y su dominio.

Para la resolución del ejercicio se han tenido en cuenta los contenidos desarrollados en la Unidad 3: Estudio de Funciones, Composición de Funciones, Función Inversa, Sesión 5.

Teniendo en cuenta que, por definición:

$$h(x)=(g\circ f)(x)=g[f(x)]$$

Reemplazando la expresión de f ,

$$h(x)=g\left(\frac{2x}{x+3}\right)$$

Aplicando g,

$$h(x)=-\frac{2x}{x+3}+1$$

La función compuesta queda definida porque el conjunto imagen de f está incluido en el dominio de g puesto que $Dom_g=R$ (función lineal)

Para el cálculo de la función inversa de h se efectúa el despeje de x considerando que:

$$y=-\frac{2x}{x+3}+1$$

Restando 1 en ambos miembros,

$$y-1=-\frac{2x}{x+3}$$

Se multiplican ambos miembros por $x+3$ puesto que $x\neq-3$ ya que -3 no pertenece al dominio de f (se trata del único valor que anula el denominador)

$$(y-1)(x+3)=-2x$$

Aplicando la propiedad distributiva del producto respecto de la suma en el primer miembro,

$$yx+3y-x-3=-2x$$

Efectuando la trasposición de términos resulta,

$$yx-x+2x=-3y+3$$

Luego,

$$yx+x=-3y+3$$

Sacando factor común x queda,

$$x(y+1)=-3y+3$$

Entonces, dividiendo miembro a miembro por $y+1\neq 0$ resulta,

$$x=\frac{-3y+3}{y+1} \qquad (1)$$

La ecuación **(1)** tiene solución única para cualquier $y\neq-1$ lo cual asegura la biyectividad y la existencia de la función inversa.

Entonces, permutando las variables porque es costumbre usar la letra x como variable independiente, la expresión de la función inversa de h queda:

$$y=\frac{-3x+3}{x+1}$$

O bien,

$$h^{-1}(x)=\frac{-3x+3}{x+1}$$

Para la determinación de su dominio, se excluyen los valores que anulan el denominador de la expresión. En definitiva**:**

$$Dom_{h^{-1}}=R-\{-1\}$$

4. Determinar la ecuación de la función lineal $\boldsymbol{f(x)}$, sabiendo que es paralela a $\boldsymbol{g(x) = -\frac{5}{2} + 3x}$ y pasa por el punto $(\boldsymbol{-1; 0})$.

Para la resolución de este ejercicio utilizaremos los conceptos vistos del tema "Función Lineal"

Si sabemos que es paralela a $\boldsymbol{g(x)}$ entonces la pendiente de $\boldsymbol{f(x)}$ va a ser el mismo valor que la pendiente de $\boldsymbol{g(x)}$.

Como la pendiente de $\boldsymbol{g(x)}$ es $\boldsymbol{3}$, la pendiente de $\boldsymbol{f(x)}$ también lo será.

Por lo tanto, podemos escribir la función $\boldsymbol{f}$ como $\boldsymbol{f(x) = 3x + b}$

Para hallar $\boldsymbol{b}$, tenemos el dato de que la función $\boldsymbol{f}$ pasa por el punto $(\boldsymbol{-1; 0})$. Reemplazamos este dato en la fórmula de la función para obtener el valor de $\boldsymbol{b}$:

$$\boldsymbol{0 = 3 \cdot (-1) + b}$$

$$\boldsymbol{0 = -3 + b}$$

$$\boldsymbol{3 = b}$$

Entonces: $\boldsymbol{f(x) = 3x + 3}$