APELLIDO:	CALIFICACIÓN:
NOMBRE:	
DNI (registrado en SIU Guaraní):	
E-MAIL:	DOCENTE (nombre y apellido):
TEL:	
AULA:	

Tabla de uso exclusivo para el docente

	1	2	3	4
Puntaje de cada ejercicio	2,50	2,50	2,50	2,50

Duración del examen: 1h 30'. Completar los datos personales con letra clara, mayúscula e imprenta.

No se aceptarán respuestas en lápiz.

1. Determinar los valores de $\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{R}$ para que el siguiente sistema tenga infinitas soluciones

$$\begin{cases} \boldsymbol{x+y+z=b-1} \\ \boldsymbol{2x+(b-1)y+2z=b} \\ \boldsymbol{(b-1)x+2y+z=1} \end{cases}$$

En principio, notemos que el sistema:

$$\begin{cases} x+y+z=b-1 \\ 2x+(b-1)y+2z=b \\ (b-1)x+2y+z=1 \end{cases}$$

Encuentra su equivalente matricial en la siguiente expresión:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & b-1 & 2 \\ b-1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b-1 \\ b \\ 1 \end{pmatrix}$$

Luego, emplearemos el método de eliminación de Gauss sobre la matriz ampliada como vía de resolución (ver apunte de cátedra "Sistemas lineales y matrices"):

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & b-1 \\ 2 & b-1 & 2 & b \\ b-1 & 2 & 1 & 1 \end{array}$$

Efectuando las operaciones elementales $2F_1 - F_2 \rightarrow F_2$ y $(b-1)F_1 - F_3 \rightarrow F_3$, resulta:

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & b-1 \\ 0 & 3-b & 0 & b-2 \\ 0 & b-3 & b-2 & (b-1)^2-1 \end{array}$$

Luego, haciendo $F_2 + F_3 \rightarrow F_3$ obtenemos:

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & b-1 \\ 0 & 3-b & 0 & b-2 \\ 0 & 0 & b-2 & (b-1)^2-1+(b-2) \end{array} \qquad (2)$$

Del análisis de la última fila de la matriz obtenida en (2) se desprende directamente que para que el sistema dado tenga infinitas soluciones deben darse simultáneamente las siguientes condiciones: $b-2=0$ y $(b-1)^2-1+(b-2)=0$

Siendo que el único valor de b tal que $b-2=0$ es $b=2$ y además dicho valor satisface la segunda igualdad, es decir, $(2-1)^2-1+(2-2)=0$ concluimos que resulta el único valor tal que se satisface lo pedido.

2. Siete compañeros de trabajo se encuentran en una fiesta organizada por la empresa a la que pertenecen y todos se estrechan la mano. ¿Cuántos apretones de mano se dan en total?

Supongamos, a modo de ejemplo, que el compañero A estrecha la mano con sus 6 colegas. A continuación, el colega B repite el gesto, pero ya no vuelve a estrechar la mano con el colega A (es claro que no importa el orden en el que dos compañeros cualesquiera se den la mano por lo que se debe tener especial cuidado de no efectuar conteos dobles).
Luego, estamos frente a un caso de combinación simple o sin repetición, por lo que podemos asegurar que habrá un total de $C_{7,2}$ apretones de mano.
Esto es: $C_{7,2} = \frac{7!}{(7-2)!2!} \rightarrow C_{7,2} = \frac{7.6.\cancel{5!}}{\cancel{5!}2!} \rightarrow C_{7,2} = \frac{7.6}{2} \rightarrow C_{7,2} = 21$ intercambios posibles diferentes.
Para profundizar sobre los contenidos abordados en la resolución del presente ejercicio les sugerimos revisar el apunte de cátedra titulado "Elementos de combinatoria" que se encuentra como material de consulta en el Campus Virtual de la signatura.

3. Hallar el/los vector/es $\vec{\boldsymbol{w}} \in \mathbb{R}^2$ que sea perpendicular a $\vec{\boldsymbol{v}} = (\mathbf{2}; -\mathbf{1})$ que tenga módulo **4.**

Debemos encontrar un vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ que sea perpendicular al vector $\vec{v} = (2; -1)$. Sabemos que para que dos vectores sean perpendiculares su producto escalar debe ser nulo, es decir $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$

Planteamos el producto para este caso y resulta:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$$

Resolvemos el producto escalar:

$$(2; -1) \cdot (w_x; w_y) = 0$$

$$2w_x - w_y = 0$$

$$w_y = 2w_x$$

Por lo tanto, los vectores que estamos buscando son de la forma: $\vec{w} = (w_x; 2w_x)$. De estos infinitos vectores que verifican la condición propuesta debemos encontrar aquellos de módulo 4. Entonces:

$$|\vec{w}| = \sqrt{{w_x}^2 + (2w_x)^2}$$

Como sabemos que el módulo de $\vec{b}$ es 4, reemplazamos y resulta:

$$4 = \sqrt{{w_x}^2 + 4{w_x}^2}$$

Resolvemos y obtenemos que

$$16 = 5{w_x}^2$$

Despejamos,

$$\frac{16}{5} = {w_x}^2 \leftrightarrow \sqrt{\frac{16}{5}} = |w_x| \leftrightarrow \frac{4}{\sqrt{5}} = |w_x|$$

$$w_{x_1} = \frac{4}{\sqrt{5}} \quad o \quad w_{x_2} = -\frac{4}{\sqrt{5}}$$

Por lo tanto, existen dos vectores $\vec{w}$ que verifican las condiciones pedidas.

Si $w_{x_1} = \frac{4}{\sqrt{5}}$ como sabemos que $w_y = 2w_x$, entonces $w_{y_1} = \frac{8}{\sqrt{5}}$

Con lo cual, $\overrightarrow{w_1} = \left(\frac{4}{\sqrt{5}}; \frac{8}{\sqrt{5}}\right)$

Si $w_{x_2} = -\frac{4}{\sqrt{5}}$ como sabemos que $w_y = 2w_x$, entonces $w_{y_2} = -\frac{8}{\sqrt{5}}$

Por lo tanto, $\overrightarrow{w_2} = \left(-\frac{4}{\sqrt{5}}; -\frac{8}{\sqrt{5}}\right)$

4. Resolver: $\int \boldsymbol{(4x^2 - 3x + 8)^3 \,.\, (8x - 3)dx}$

Para la realización de este ejercicio se deben considerar los siguientes contenidos:

Sesión 10: Derivadas. Tabla de derivadas

Sesión 12: Integrales; Métodos de integración: sustitución

Es posible resolver esta integral mediante el método de sustitución:

$$\int (4x^2 - 3x + 8)^3 \,.\, (8x - 3)dx$$

Realizamos un cambio de variable: $u = 4x^2 - 3x + 8$ (1)

Derivando: $du = 8x - 3\ dx$ (2)

Reemplazando (1) y (2) en la integral: $\int u^3 du$

Resolviendo la integral: $\frac{u^4}{4} + C$

Reemplazando por (1) en la expresión: $\frac{(4x^2-3x+8)^4}{4} + C$