

03/05/2024

TEMA 1

Hoja 1 de 4

APELLIDO:	CALIFICACIÓN:
NOMBRE:	
DNI (registrado en SIU Guaraní):	
E-MAIL:	
TEL:	DOCENTE (nombre y apellido):
AULA:	

Tabla de uso exclusivo para el docente

	1	2	3	4
Puntaje de cada ejercicio	2,50	2,50	2,50	2,50

Duración del examen: 1h 30'. Completar los datos personales con letra clara, mayúscula e imprenta.

No se aceptarán respuestas en lápiz.

1. Hallar el conjunto de positividad (C^+) del polinomio $P(x) = x^4 + 3x^3 - 10x^2$

Para determinar el conjunto de positividad de una función necesitamos conocer el dominio y el conjunto de ceros de la misma. En este caso es una función polinómica, su dominio es \mathbb{R} .

Para determinar sus raíces podemos sacar factor común x^2 , de esta forma nos queda:

$$P(x) = x^2(x^2 + 3x - 10) \Rightarrow 0 \text{ es una de las raíces.}$$

Hallamos ahora las raíces de la expresión cuadrática que nos quedó:

$$x^2 + 3x - 10 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10)}}{2 \cdot 1} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{49}}{2} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-3 \pm 7}{2}$$

$$x_1 = 2 \text{ y } x_2 = -5$$

Por lo tanto, la expresión factorizada de $P(x)$ es:

$$P(x) = x^2(x - 2)(x + 5) \Rightarrow 2 \text{ y } -5 \text{ son las otras raíces}$$

Aplicando las consecuencias del Teorema de Bolzano, analizamos el signo de la función en los intervalos del dominio determinados por sus raíces:

$(-\infty; -5)$	$(-5; 0)$	$(0; 2)$	$(2; +\infty)$
$x = -6$	$x = -1$	$x = 1$	$x = 3$
$P(-6) = (-6)^2 \cdot (-8) \cdot (-1)$	$P(-1) = (-1)^2 \cdot (-3) \cdot 4$	$P(1) = 1^2 \cdot (-1) \cdot 6$	$P(3) = 3^2 \cdot 1 \cdot 8$
$P(-6) > 0$	$P(-1) < 0$	$P(1) < 0$	$P(3) > 0$
Intervalo de positividad	Intervalo de negatividad	Intervalo de negatividad	Intervalo de positividad

Entonces $C^+ = (-\infty; -5) \cup (2; +\infty)$

Para la resolución de este ejercicio trabajamos con los conceptos de Función Polinómica, Factorización de un Polinomio, Teorema de Bolzano y su consecuencia y Conjunto de Positividad y Negatividad desarrollados en los apuntes "Función Polinómica" y "Polinomios".

APELLIDO Y NOMBRE:

DNI:

TEMA 1
Hoja 2 de 4

2. Encontrar los valores de a y c para que la función $f(x) = \frac{ax-5}{cx+12}$ tenga asíntotas $y = 2$ y $x = 3$

En este tipo de funciones, que $x = 3$ sea asíntota horizontal significa que dicho valor anula el denominador, por lo tanto cuando la variable toma ese valor el denominador toma valor 0 .

Esto significa que: si $x = 3$ entonces $cx + 12 = 0 \Rightarrow c \cdot 3 + 12 = 0 \Rightarrow c = -4$.

Además que $y = 2$ es asíntota vertical de la función significa que:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax - 5}{-4x + 12} = 2$$

Se presenta una indeterminación, para resolverla dividimos numerador y denominador por x :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{ax}{x} - \frac{5}{x}}{\frac{-4x}{x} + \frac{12}{x}} = 2$$

Los términos $\frac{5}{x}$ y $\frac{12}{x}$ se aproximan a 0 cuando $x \rightarrow \infty$, simplificando x en los otros dos términos y resolviendo el límite, nos queda:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a - \frac{5}{x}}{-4 + \frac{12}{x}} = 2 \Rightarrow \frac{a}{-4} = 2 \Rightarrow a = -8$$

Para la resolución de este ejercicio debemos tener en cuenta los conceptos de Asíntota horizontal y vertical desarrollados en el apunte "Límites y Asíntotas".

3. Dado el punto $Q = (1; -3)$, hallar todos los puntos $P = (b; 8 - b)$ tales que la distancia entre los puntos sea igual a 10.

Planteamos la distancia entre los puntos P y Q :

$$d(P; Q) = \sqrt{(1 - b)^2 + (-3 - (8 - b))^2}$$

$$10 = \sqrt{(1 - b)^2 + (-3 - 8 + b)^2}$$

$$100 = (1 - b)^2 + (-11 + b)^2$$

$$100 = 1 - 2b + b^2 + 121 - 22b + b^2$$

$$100 = 2b^2 - 24b + 122$$

$$0 = 2b^2 - 24b + 22$$

Dividimos por 2 ambos miembros y resolvemos la ecuación que se obtiene:

$$0 = b^2 - 12b + 11$$

$$b_1, b_2 = \frac{-(-12) \pm \sqrt{(-12)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 11}}{2 \cdot 1} = \frac{12 \pm \sqrt{100}}{2} = \frac{12 \pm 10}{2}$$

$$b_1 = 11 \quad \text{y} \quad b_2 = 1$$

Reemplazando en las coordenadas de P , resulta: $P_1 = (11, -3)$ y $P_2 = (1, 7)$

Para la resolución de este ejercicio aplicamos el concepto de Distancia entre dos puntos y su fórmula, desarrollado en el apunte "Distancia entre puntos" y resolución de ecuación cuadrática desarrollado en el apunte "Ecuaciones e Inecuaciones".

4. Determinar el dominio de la función

$$f(x) = \log_3(x + 9)$$

y el conjunto de ceros C^0 de la función $f^{-1}(x)$

Solución:

Para hallar el dominio de f debemos tener presente que al tratarse de una función logarítmica su argumento debe ser estrictamente mayor que cero pues de otra manera no quedaría bien definida.

Luego, planteamos: $x + 9 > 0 \rightarrow x > -9$ y por lo tanto $Dom_f = (-9; +\infty)$

Por otra parte, una forma de obtener el conjunto de ceros de f^{-1} consiste en determinar previamente la expresión que la define:

$$y = \log_3(x + 9)$$

$$3^y = x + 9$$

$$3^y - 9 = x$$

De donde $f^{-1}(x) = 3^x - 9$

Por último, sabiendo que $C_{f^{-1}}^0 = \{x \in Dom_{f^{-1}} | f^{-1}(x) = 0\}$ resulta: $C_{f^{-1}}^0 = \{x \in Dom_{f^{-1}} | 3^x - 9 = 0\}$

Siendo que $3^x - 9 = 0 \rightarrow 3^x = 9 \rightarrow 3^x = 3^2 \rightarrow x = 2$ concluimos que $C_{f^{-1}}^0 = \{2\}$

Sin embargo, existe una manera más sencilla de obtener $C_{f^{-1}}^0$. Por ser f^{-1} y f inversas una en relación con la otra, sus gráficas resultan simétricas respecto a la recta $y = x$. Por ello, si $f(a) = b$ entonces $f^{-1}(b) = a$ por definición.

En particular, si $f^{-1}(a) = 0$, es decir, si "a" pertenece al conjunto de ceros de f^{-1} , entonces debe ser $f(0) = a$. Luego, dado que ya contamos con la expresión de f buscamos $f(0) = \log_3(0 + 9) \rightarrow f(0) = \log_3(9) \rightarrow f(0) = 2$ y de aquí concluimos directamente que $C_{f^{-1}}^0 = \{2\}$.

En este ejercicio abordamos el estudio de las funciones exponencial y logarítmica, sus principales características y propiedades y el concepto de función inversa. Pueden encontrar ejemplos de ejercicios resueltos y otros materiales de estudio referidos a estos temas en las sesiones 3 y 5 del Campus Virtual