



## TEMA 5

### Ejercicio 1 (2 puntos)

Considerar la función

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + x$$

Determinar todos los puntos del plano en los cuales la recta tangente a la gráfica de  $f$  es paralela a la

$$\text{recta } y = x - \frac{1}{3}$$

### Respuesta

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa  $x_0$  es

$$y_t = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Como la recta tangente debe ser paralela a la recta  $y = x - \frac{1}{3}$  tenemos que la pendiente debe ser igual a

$$f'(x_0) = 1$$

La derivada de la función es

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$$

Ahora debemos buscar el o los valores de  $x_0$  para los cuales  $f'(x_0) = 1$ .

Entonces

$$3x^2 - 4x + 1 = 1 \Leftrightarrow 3x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(3x - 4) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ó } x = \frac{4}{3}$$

Calculamos el valor de la función en estos valores:

$$f(0) = 0$$

$$f\left(\frac{4}{3}\right) = \left(\frac{4}{3}\right)^3 - 2\left(\frac{4}{3}\right)^2 + \frac{4}{3} = \frac{4}{27}$$

Luego, los puntos buscados son  $P = (0; 0)$ ,  $Q = \left(\frac{4}{3}; \frac{4}{27}\right)$



**Ejercicio 2 (3 puntos)**

Hallar la familia de primitivas de

$$\int \sqrt{x-2} + 5\cos(x) dx$$

**Respuesta**

Aplicando las propiedades de las integrales tenemos que

$$\int \sqrt{x-2} + 5\cos(x) dx = \int \sqrt{x-2} dx + 5 \int \cos(x) dx$$

Para calcular la integral  $\int \sqrt{x-2} dx$  aplicamos la sustitución  $u = x - 2$ . Como  $du = (x - 2)' dx = dx$ , tenemos que  $du = dx$  y la integral se reduce a calcular:

$$\int \sqrt{x-2} dx = \int \sqrt{u} du = \int u^{\frac{1}{2}} du = \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + k = \frac{2}{3} \sqrt{(x-2)^3} + k_1$$

Por otro lado  $\int \cos(x) dx = \text{sen}(x) + k_2$

Entonces

$$\int \sqrt{x-2} + 5\cos(x) dx = \frac{2}{3} \sqrt{(x-2)^3} + 5\text{sen}(x) + K$$



### Ejercicio 3 (2 puntos)

Considerar la función

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad / \quad f(x) = 2^{ax} + b$$

Se sabe que su conjunto de positividad  $C^+$  es el intervalo  $(1; +\infty)$  y su ordenada al origen es  $-7$ .

Determinar los valores de  $a, b$ , ambos números reales.

### Respuesta

La ordenada al origen es  $-7$ , entonces

$$f(0) = -7 \Rightarrow 2^{a \cdot 0} + b = -7 \Leftrightarrow 1 + b = -7 \Leftrightarrow b = -8$$

Como la función es positiva en el intervalo  $(1; +\infty)$  tenemos que

$$f(1) = 0 \Rightarrow 2^{a \cdot 1} + b = 0$$

Como ya vimos que  $b = -8$

$$2^a - 8 = 0 \Leftrightarrow 2^a = 8 \Rightarrow a = 3$$

### Ejercicio 4 (3 puntos)

Considerar la función

$$f(x) = 1 - \frac{x}{x^2 + 4}$$

Hallar los extremos locales de  $f$ .

Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

### Respuesta

Primero hallamos la derivada de  $f(x)$ :

$$f'(x) = -\frac{4 - x^2}{(x^2 + 4)^2} = \frac{x^2 - 4}{(x^2 + 4)^2}$$

El dominio de la función derivada es el conjunto de todos los números reales.



Para hallar los puntos críticos debemos buscar aquellos valores para los cuales se anula la derivada primera.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow |x| = 2 \Leftrightarrow x = 2 \text{ ó } x = -2$$

Para analizar el signo de la derivada es suficiente con evaluar el signo del polinomio del numerador ya que el denominador es siempre positivo. Entonces:

x	$(-\infty; -2)$	-2	$(-2; 2)$	2	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+

Por lo tanto, la función es decreciente en el intervalo  $(-2; 2)$

La función es creciente en los intervalos  $(-\infty; -2)$  y  $(2, +\infty)$

Los extremos locales son:

- Máximo en el punto  $Max = (-2; f(-2))$
- Mínimo en el punto  $Min = (2; f(2))$