APELLIDO:	CALIFICACIÓN:
NOMBRE:	
DNI (registrado en SIU Guaraní):	
E-MAIL:	DOCENTE (nombre y apellido):
TEL:	
AULA:	

Tabla de uso exclusivo para el docente

	1	2	3	4
Puntaje de cada ejercicio	2,50	2,50	2,50	2,50

Duración del examen: 1h 30'. Completar los datos personales con letra clara, mayúscula e imprenta.

No se aceptarán respuestas en lápiz.

1. Encontrar los valores de a y c para que la función $f(x) = \frac{ax-5}{cx+12}$ tenga asíntotas $y = 2$ y $x = 3$

En este tipo de funciones, que $x = 3$ sea asíntota horizontal significa que dicho valor anula el denominador, por lo tanto cuando la variable toma ese valor el denominador toma valor $\mathbf{0}$.

Esto significa que: si $x = 3$ entonces $cx + 12 = 0 \Rightarrow c.3 + 12 = 0 \Rightarrow c = -4$.

Además que $y = 2$ es asíntota vertical de la función significa que:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 2 \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{ax - 5}{-4x + 12} = 2$$

Se presenta una indeterminación, para resolverla dividimos numerador y denominador por x:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{ax}{x} - \frac{5}{x}}{\frac{-4x}{x} + \frac{12}{x}} = 2$$

Los términos $\frac{5}{x}$ y $\frac{12}{x}$ se aproximan a $\mathbf{0}$ cuando $x \to \infty$, simplificando x en los otros dos términos y resolviendo el límite, nos queda:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a - \frac{5}{x}}{-4 + \frac{12}{x}} = 2 \Rightarrow \frac{a}{-4} = 2 \Rightarrow a = -8$$

Para la resolución de este ejercicio debemos tener en cuenta los conceptos de Asíntota horizontal y vertical desarrollados en el apunte "Límites y Asíntotas".

2. Dada la función lineal $f(x) = -\frac{1}{3}x + 1$ escribir como intervalo o como unión de intervalos al conjunto:

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} / \frac{f(x)}{x} \leq 2\right\}$$

$$f(x) = -\frac{1}{3}x + 1 \iff f(x) = \frac{-x+3}{3}$$

Por lo tanto:

$$\frac{f(x)}{x} \leq 2 \iff \frac{\frac{-x+3}{3}}{x} \leq 2$$

Para resolver esta inecuación es necesario escribirla como $\leq \mathbf{0}$, por lo tanto restamos $\mathbf{2}$ en ambos miembros:

$$\frac{-x+3}{3x} - 2 \leq 0 \Rightarrow \frac{-x+3-6x}{3x} \leq 0 \Rightarrow \frac{-7x+3}{3x} \leq 0$$

La inecuación plantea que el cociente es negativo o cero, para lo cual debe ocurrir alguna de las siguientes situaciones:

- $-7x + 3 \geq 0 \ \wedge 3x < 0 \ \Rightarrow \ x \leq \frac{3}{7} \ \wedge \ x < 0 \ \Rightarrow \ x \in \ (-\infty; 0)$
- $-7x + 3 \leq 0 \ \wedge 3x > 0 \ \Rightarrow \ x \geq \frac{3}{7} \ \wedge \ x > 0 \ \Rightarrow \ x \in \ \left[\frac{3}{7}; +\infty\right)$

Por lo tanto el conjunto A es:

$$A = (-\infty; 0) \cup \left[\frac{3}{7}; +\infty\right)$$

Para la resolución de este ejercicio debemos tener en cuenta los conceptos de Resolución de Inecuaciones desarrollado en el apunte "Ecuaciones e Inecuaciones".

3. Hallar el conjunto de positividad (C^{+}) del polinomio $P(x) = x^4 + 3x^3 - 10x^2$

Para determinar el conjunto de positividad de una función necesitamos conocer el dominio y el conjunto de ceros de la misma. En este caso es una función polinomica, su dominio es $\mathbb{R}$.

Para determinar sus raíces podemos sacar factor común x^2 , de esta forma nos queda:

$$P(x) = x^2\left(x^2 + 3x - 10\right) \;\; \Rightarrow \;\; 0 \; es \; una \; de \; las \; raíces.$$

Hallamos ahora las raíces de la expresión cuadrática que nos quedó:

$$x^2 + 3x - 10 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4.1.(-10)}}{2.1} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{49}}{2} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-3 \pm 7}{2}$$

$$x_1 = 2 \;\; y \;\; x_2 = -5$$

Por lo tanto, la expresión factorizada de $P(x)$ es:

$$P(x) = x^2(x-2)(x+5) \;\; \Rightarrow \;\; 2 \; y - 5 \; son \; las \; otras \; raíces$$

Aplicando las consecuencias del Teorema de Bolzano, analizamos el signo de la función en los intervalos del dominio determinados por sus raíces:

$(-\infty; -5)$	$(-5; 0)$	$(0; 2)$	$(2; +\infty)$
$x = -6$ $P(-6) = (-6)^2.(-8).(-1)$ $P(-6) > 0$ Intervalo de positividad	$x = -1$ $P(-1) = (-1)^2.(-3).4$ $P(-1) < 0$ Intervalo de negatividad	$x = 1$ $P(1) = 1^2.(-1).6$ $P(1) < 0$ Intervalo de negatividad	$x = 3$ $P(3) = 3^2.1.8$ $P(3) > 0$ Intervalo de positividad

Entonces $C^{+} = (-\infty; -5) \cup (2; +\infty)$

Para la resolución de este ejercicio trabajamos con los conceptos de Función Polinómica, Factorización de un Polinomio, Teorema de Bolzano y su consecuencia y Conjunto de Positividad y Negatividad desarrollados en los apuntes "Función Polinomica" y "Polinomios".

4. Dado el punto $Q = (1; -3)$, hallar todos los puntos $P = (b; 8 - b)$ tales que la distancia entre los puntos sea igual a 10.

Planteamos la distancia entre los puntos P y Q:

$$d(P;Q) = \sqrt{(1-b)^2 + \left(-3-(8-b)\right)^2}$$
$$10 = \sqrt{(1-b)^2 + (-3-8+b)^2}$$
$$100 = (1-b)^2 + (-11+b)^2$$
$$100 = 1 - 2b + b^2 + 121 - 22b + b^2$$
$$100 = 2b^2 - 24b + 122$$
$$0 = 2b^2 - 24b + 22$$

Dividimos por 2 ambos miembros y resolvemos la ecuación que se obtiene:

$$0 = b^2 - 12b + 11$$
$$b_1, b_2 = \frac{-(-12) \pm \sqrt{(-12)^2 - 4.1.11}}{2.1} = \frac{12 \pm \sqrt{100}}{2} = \frac{12 \pm 10}{2}$$
$$b_1 = 11 \quad \text{y} \quad b_2 = 1$$

Reemplazando en las coordenadas de P, resulta: $P_1 = (11, -3)$ y $P_2 = (1, 7)$

Para la resolución de este ejercicio aplicamos el concepto de Distancia entre dos puntos y su fórmula, desarrollado en el apunte “Distancia entre puntos” y resolución de ecuación cuadrática desarrollado en el apunte “Ecuaciones e Inecuaciones”.