ALGEBRA

+ Este material contiene resúmenes teóricos, de los contenidos mínimos necesarios que el estudiante debe asimilar, también con el rótulo de "Seminarios" se presentan ejercicios a desarrollar y de opciones múltiples, todos ellos con su respectiva respuesta, para su autoevaluación.

Los temas del Texto básico que no se consideren en este material son opcionales para el estudiante y no exigibles al momento de la evaluación.

Para su mejor orientación le presento un índice que lo ayudará a ubicar los temas en esta guía.

Índice:

ALGEBRA

Las ecuaciones han sido tema de estudio en el ciclo primario y en el secundario, aquí hacemos un breve repaso de ellas. Se advierte que en el texto de la bibliografía básica se asume que el estudiante tiene un amplio manejo sobre el tema, es por ello que si tiene dudas deberá efectuarlas en forma virtual. El presente material contiene un **resumen teórico, ejercicios a resolver** y un **práctico complementario** que incluye distintos tipos de planteos **con solución**.

ECUACIONES

¿Qué le sugiere esta expresión " $x + 1 = 3$ " ?
Posiblemente, piense....“Esta es una igualdad” ó tal vez “Es una igualdad que se satisface únicamente para $x=2$.”

- Así, en esta unidad lo que intentamos estudiar son, **igualdades entre expresiones algebraicas que se verifican para ciertos valores de las letras, denominaremos ecuaciones a dichas igualdades e incógnitas a las letras.**

- Los valores que satisfacen la ecuación reciben el nombre **de raíces o soluciones** de la misma.

Las ecuaciones son importantes a la hora de resolver problemas, y el éxito de nuestro trabajo dependerá, en principio, de la traducción que hagamos al lenguaje matemático de dicho problema. Veamos como hacerlo, en una situación particular.

El gerente de producción de una pequeña empresa dispone de un presupuesto de \$8000 que desea destinar totalmente a la produccion mensual, sabe que los gastos fijos ascienden a \$500 por mes y que el costo de fabricación de cada producto es \$30. Se pregunta, bajo estas condiciones, ¿cuántas unidades como máximo podrá producir por mes?.

El primer paso para resolver un problema es analizar detenidamente la situación, estableciendo cuales son las incógnitas y cuales son datos.

En nuestro caso la incógnita es "la cantidad de unidades a producir por mes", la cual puede ser representada por la letra x.

x : "cantidad de unidades a producir por mes"

Los valores 30 , 500 y 8000 son datos, ahora debemos traducir al lenguaje algebraico lo que ellos representan.

Como producir una unidad le cuesta \$30, el costo de produccion de "x" unidades será:

$$30\,x$$

pero además existe un gasto fijo mensual de \$500, independiente de las cantidades producidas, que habrá que agregar al gasto total.

$$30\ x + 500$$

Si el gerente dispone de un presupuesto de $ 8000, quiere decir que el gasto máximo que puede realizar en la producción es igual a $8000, así la situación planteada puede ser representada algebraicamente por la ecuación:

$$30\ x + 500 = 8000$$

Hemos obtenido una ecuación, que debido a su estructura, se la denomina lineal.

- **Una ecuación lineal en una variable x es una ecuación donde la incógnita esta elevada a la potencia 1, y en general puede escribirse en la forma: a x + b = 0** donde a y b son constantes y a es distinto de cero.

El proceso de encontrar las raíces se denomina resolver la ecuación.

La idea es transformar la ecuación, a través de operaciones algebraicas, en otra mas simple simple de resolver, pero que admite las mismas raíces que la ecuación original.

- En tal sentido diremos que dos ecuaciones son **equivalentes** si y sólo si tienen las misma soluciones.

¿Cómo pasar de una ecuación a otra equivalente?

Para ello podemos valernos de las siguientes operaciones algebraicas:
1) Sumar algebraicamente a ambos miembros de la igualdad la misma expresión.
2) Multiplicar ambos miembros de la igualdad por un mismo factor no nulo.

Por ejemplo si queremos dar solución al problema planteado por el gerente de la empresa la ecuación a resolver es

$$30\ x + 500 = 8000$$

Como el objetivo es encontrar el valor de x, parece razonable tratar de "aislar" de algún modo la variable en cuestión. Si sumamos a ambos miembros de la igualdad (-500)

$$30\ x + 500 - 500 = 8000 - 500$$

obtenemos una ecuación equivalente, más simple que la original,

$$30\ x = 7500$$

pero aún no hemos encontrado la incógnita. Podemos entonces simplificar más la ecuación si multiplicamos ambos miembros por 1/30

$$1/30\ \ 30\ x = 1/30\ \ 7500$$

de donde surge que **x = 2500**

Así el gerente de la empresa podrá producir, de acuerdo a su presupuesto, 2500 unidades mensuales.

OBSERVACIÓN: Por lo general el estudiante para encontrar el valor de x usa reglitas tales como:

- "Lo que esta sumando en un miembro pasa restando al otro",
- "lo que esta multiplicando pasa dividiendo".

Estas reglitas no son incorrectas, pues en cierta medida constituyen una forma abreviada de las operaciones enunciadas, **el problema está en la forma indiscriminada en que se las aplica**. **¡Esté atento!**

Ahora veamos si puede resolver el siguiente problema.

Actividad 1:
El padre tiene 32 años y el hijo 5. ¿Al cabo de cuántos años será la edad del padre diez veces mayor que la del hijo?

No todos los problemas involucran una sola variable, puede que en el planteo surjan dos, tres o más incógnitas, y cuanto mayor es el número de ellas, mas complicada es la búsqueda de sus soluciones.

- Dentro de la gama de posibilidades que pueden darse, tenemos el caso de una **ecuación lineal con dos variables x e y , la cual tiene la siguiente estructura:**

$$\mathbf{a\,x + b\,y = c}$$

donde a, b y c son los parámetros de la ecuación con a y b distintos de cero.

Ejemplifiquemos a través de un problema particular.

Supongamos que un criador de animales puede adquirir, para la alimentacion de los mismos, dos tipos de productos A y B, ambos del mismo costo. Si sabe que el alimento A contiene 60 gr. de grasa por kg., miéntras que el alimento B contiene 30 gr. por kg. ¿cómo debe combinar los alimentos si desea que el contenido de grasa sea 600 gramos?

Llamemos
"x " a la cantidad de alimento A en la mezcla, en kg.
"y " a la cantidad de alimento B en la mezcla, en kg.

El aporte de grasa del alimento A es de 60 gr/kg. entonces el aporte de grasa de x kg será

$$60\,x$$

Análogamente el aporte de grasa del alimento B en y kg será

$$30\,y$$

Dado que el aporte total debe ser de 600 gramos, el modelo que describe la situación planteada será

$$60\,x + 30\,y = 600$$

Estamos en presencia de una sola ecuación con dos incógnitas, veamos cuáles son las soluciones;
Si $x = 0$ entonces $y = 20$
Si $x = 5$ entonces $y = 10$
Si $x = 6{,}5$ entonces $y = 7$

- Cada una de ellas se denomina **solución particular**.

Así podríamos encontrar infinitas alternativas de mezcla de los alimentos que contengan un total de 600 gramos de grasa.

Podemos pensar que esta característica, de poseer múltiples soluciones se debe a que existe una única condición y dos incógnitas, de allí que una de ellas puede variar libremente.

- La **solución general**, se obtiene despejando una de las variables en función de la otra, esto es despejando x en términos de y ó y en términos de x,

En nuestro caso, despejemos y

$$60\,x + 30\,y = 600$$

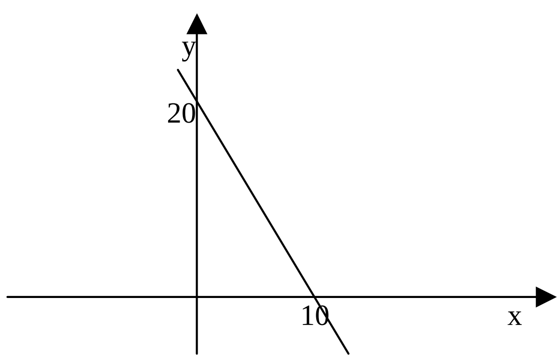
<===> $$y = \frac{600 - 60\,x}{30} \qquad \text{Para todo } x$$

Distribuyendo denominador**, la solución general** será:

$$y = 20 - 2\,x \qquad \text{Para todo } x$$

Es decir, cualquier **solución particular** se obtiene dando a “x” un valor arbitrario.

Además se puede observar que si graficamos estas soluciones, o sea, los pares (x, y) que verifican la ecuación, en un sistema de coordenadas cartesianas las mismas se alínean formando una recta.
Por ejemplo en el caso anterior se obtendría la siguiente solución gráfica



¿Qué ocurriría si en el caso anterior agregamos una nueva restricción?

Por ejemplo, que el criador de animales desee que la mezcla contenga exactamente 15 kg de alimento.

Algebraicamente podemos expresar esta condición a través de la ecuación

$$x + y = 15$$

es decir la cantidad de alimento de tipo A más la cantidad de alimento de tipo B debe ser igual a 15 kg.

Tendremos pues que la solución del problema consistirá en encontrar los valores de x e y que satisfagan simultáneamente ambas ecuaciones.

$$\begin{cases} 60\,x + 30\,y = 600 \\ x + y = 15 \end{cases}$$

Esto es lo que se denomina un sistema de ecuaciones lineales, en este caso de dos ecuaciones con dos incógnitas.

- **Un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas** , tiene la extructura

$$\begin{cases} a\,x + b\,y = f \\ c\,x + d\,y = g \end{cases}$$

donde a, b, c, d, e, f, g son constantes.

¿Cómo obtener el conjunto solución?

Para ello se han implementado numerosos métodos: por igualación, reducción, sustitución, etc.

Apliquemos el método por sustitución, el cual consiste en despejar de cualquiera de las ecuaciones, una de las incógnitas, por ejemplo de la segunda ecuación despejemos "y".

Así

$$y = 15 - x$$

verificará la segunda condición. Para que también verifique la primera deberíamos sustituir el valor de y en la primera ecuación por la expresión hallada anteriormente.

Esto es, si teníamos

$$60\,x + 30\,y = 600$$

reemplazamos y , de donde resulta

$$60\,x + 30\,(15 - x) = 600$$

la cual es una ecuación de primer grado con una incógnita, que sabemos resolver.

Apliquemos propiedad distributiva

$$60\,x + 30\,.\,15 - 30\,x = 600$$

operemos algebraicamente

$$30\,x + 450 = 600$$

y despejemos.

$$30\,x = 600 - 450$$

$$x = 150/\,30$$

Entonces

$$\mathbf{x = 5}$$

Pero para dar respuesta a nuestro interrogante también debemos encontrar el valor de y.

Como vimos para que se verifique la segunda ecuación "y" debía ser igual a 15 - x , ahora dado que x = 5 , resulta **el valor de y es 10.**

Así, la respuesta al problema planteado será: para que el criador de animales obtenga una mezcla de 15 kg. con un aporte de 600 gramos de grasa deberá usar 5 kg de alimento A y 10 kg de alimento B.

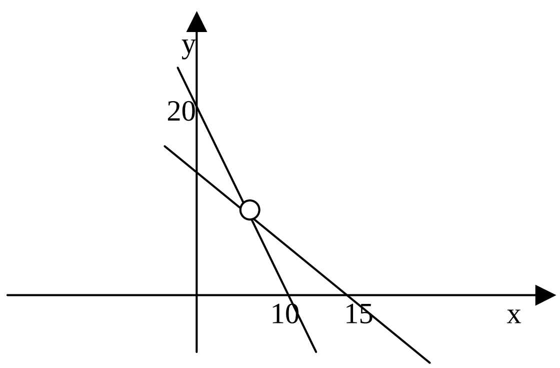
También podemos especificar la solución, de una manera más algebraica diciendo que:

"El par (x , y) = (5 , 10) es la solución del sistema."

- Resumamos el **método de sustitución** como sigue:

- Despejamos de cualquiera de las ecuaciones una de las incógnitas.
- En la ecuación restante sustituimos dicha incógnita por su expresión equivalente, obteniendo una ecuacion lineal con una incógnita.
- Resolvemos la ecuación, y el valor encontrado se reemplaza en cualquiera de las ecuaciones originales, buscamos entonces el valor de la incógnita restante.

Ahora agreguemos al gráfico anterior las soluciones de la segunda ecuación.
Como nos interesa los valores de x y de y que verifiquen simultáneamente ambas ecuaciones, la solución al sistema estará dado por la intersección entre ambos conjuntos de soluciones, es decir por el punto de encuentro entre las dos rectas.



En este caso hemos encontrado una única solución a nuestro problema, pero esto no siempre ocurre.

Veamos el siguiente sistema

$$\begin{cases} 2\,x + y \quad = 10 \\ 3\,x + 3/2\,y = 15 \end{cases}$$

Despejemos y de la primera ecuación

$$y = 10 - 2x$$

sustituimos y en la segunda ecuación por su expresión equivalente .

$$3x + 3/2\,(10 - 2x) = 15$$

aplicamos propiedad distributiva

$$3x + 3/2\ 10 - 3/2\ 2x = 15$$

$$3x + 15 - 3x = 15$$

Realizando las operaciones indicadas, resulta

$$0x + 15 = 15$$

¡Hemos obtenido una identidad! Esto significa que cualquiera sea el valor de x, verifica la ecuación propuesta. Toda vez que ello suceda diremos que **el sistema es compatible indeterminado**, compatible porque admite solución e indeterminado pues para cada valor de "x", "y" asumirá el valor "10 - 2x", como lo establecía la primera ecuación.

Así la solución como par ordenado en este caso será:

$$(x, y) = (x, 10 - 2x) \quad V\ x \quad R$$

Finalmente consideremos el siguiente sistema,

$$\begin{cases} 2x + y = 10 \\ 3x + 3/2\,y = 20 \end{cases}$$

Es muy parecido al anterior, y los cálculos son bastantes similares

Despejemos y de la primera ecuación

$$y = 10 - 2x$$

sustituimos y en la segunda ecuación por su expresión equivalente .

$$3x + 3/2\,(10 - 2x) = 20$$

aplicamos propiedad distributiva

$$3x + 3/2\ 10 - 3/2\ 2x = 20$$
$$3x + 15 - 3x = 20$$

Realizando las operaciones indicadas, resulta

$$0x + 15 = 20$$

¡Llegamos a una proposición que es falsa! obviamente 15 no es igual a 20, esto significa que no existen x e y que verifiquen simultáneamente las dos ecuaciones propuestas.

Toda vez que ello suceda diremos que el sistema es incompatible, es decir no posee solución.

- Resumiendo un sistema de ecuaciones lineales será:

Compatible determinado: cuando el sistema posea una única solución.
Compatible indeterminado: cuando el sistema posea múltiples soluciones.
Incompatible: cuando el sistema no admita solución.

Actividad 2:

Analice como sería la visualización gráfica de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, compatible indeterminado y de un sistema incompatible.

Actividad 3:

Analice como sería la visualización gráfica de un sistema de **tres** ecuaciones lineales con dos incógnitas, compatible determinado, compatible indeterminado y de un sistema incompatible.

- Si tenemos **tres ecuaciones lineales con tres incógnitas** se procede de manera similar teniendo en cuenta que nuestro conjunto solución, si existe, debe estar compuesto por ternas ordenadas. La idea básica es pasar de un sistema de tres ecuaciones a un sistema de dos ecuaciones y luego resolver como antes.

Veamos cuáles son los pasos a seguir, insistiendo en el método de sustitución.

Consideremos el sistema:

$$\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x \quad - z = -2 \\ x + y + z = 6 \end{cases}$$

El primer paso es despejar una de las incógnitas de cualquiera de las ecuaciones, en nuestro caso conviene despejar x de la segunda ecuación.

$$x = -2 + z$$

Una vez hecho esto, sustituimos el valor de x por la expresión anterior, en las ecuaciones restantes

$$\begin{cases} 2(-2 + z) - y + z = 3 \\ (-2 + z) + y + z = 6 \end{cases}$$

Operamos algebraicamente en cada ecuación

$$\begin{cases} -4 + 2z - y + z = 3 \\ -2 + z + y + z = 6 \end{cases}$$

obteniendo un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas

$$\begin{cases} -y + 3z = 7 \\ y + 2z = 8 \end{cases}$$

Resolviendo como antes resulta que $y = 2$ y $z = 3$, pero para encontrar el valor de la solución, falta hallar el valor de x. Como esta variable había sido despejada anteriormente:

$$x = -2 + z$$

Reemplazamos z por 3, de donde surge que

$$x = 1$$

Así nuestro sistema es compatible determinado, siendo su única solución la terna

$$(x, y, z) = (1, 2, 3)$$

Al igual que en el caso de dos ecuaciones con dos incógnitas se podría haber presentado una situación de indeterminación o incompatibilidad.
En todos los casos **los resultados pueden ser verificados** a través de su reemplazo en las ecuaciones originales, este es un punto en que no nos detendremos, pero que sugerimos como forma de autoevaluación.

Planteo de problemas: (ver casos en Práctico Complementario)

La solución de una ecuación, según vimos, puede o no ser tarea fácil, pero su planteo, en base a los datos de un problema suele ser mucho mas difícil. Seguramente algunos son mas idóneos que otros en esta tarea pero lo cierto es que la práctica puede ayudar a desarrollar una capacidad aceptable para la formulación y la resolución de las ecuaciones.

- A manera de resumen podemos establecer que en general los pasos que se siguen para resolver un problema son:

1) Leer el problema hasta comprender su enunciado.
2) Identificar los datos y las incógnitas del problema. Representando estas últimas por letras.
3) Expresar algebraicamente la relación existente entre los datos y las incógnitas, a través de una o varias ecuaciones.
4) Resolver las ecuaciones planteadas.
5) Verificar que los resultados obtenidos satisfagan las ecuaciones planteadas y la pregunta original del problema.

<u>SEMINARIO 1</u>: ECUACIONES

Una "ecuación" es una igualdad algebraica, que se verifica para ciertos valores de las letras, a las cuales se las denomina incógnitas.
El objetivo es entonces encontrar los valores que cumplen la igualdad y a los que denominamos "solución" de la ecuación.
En este seminario partimos de ecuaciones lineales con una sola incógnita, a modo de revisión.
Luego se incorpora al análisis varias ecuaciones con dos y tres incógnitas, lo que da origen a sistemas de ecuaciones lineales.
Se pretende rescatar algunas de las técnicas de resolución, ya conocidas por el estudiante, y lograr cierta ductilidad para el planteo de problemas de distinta índole que involucran incógnitas.

Los ejercicios 1, 2 y 3 , posiblemente parezcan algo elementales, pero es necesario que antes de comenzar con actividades más complejas el estudiante haya evacuado todo tipo de dudas en la resolución de ecuaciones con una incógnita.

Repaso

1) Encuentre el valor de x que verifique, en cada caso, la igualdad propuesta:

a) $3 + x = 7$ b) $-2 + x = 8$ c) $x - 3 = -2$

d) $2x - 1 = 5$ e) $3x - 2 = -2$ f) $2x - 2 = 2x$

g) $3x - 3 = 3(x-1)$ h) $4x - 1 = 3x$ i) $20x + 50 = 300$

2) Resolver las siguientes ecuaciones lineales: (verifique el resultado obtenido)

a) $2x - 3 = x/2$ b) $2x - 3 = -(x + 3) + x$

c) $x = \dfrac{x - 1}{2} + 2$ d) $1 + \dfrac{x - 3}{4} = -2$

e) $\dfrac{x - 2}{3} + 1 = \dfrac{2x + 1}{3} - 2$ f) $\dfrac{3x - 1/2}{-2} = \dfrac{2x - 4}{-5} - (1/2)x$

3) Plantee y resuelva los siguientes problemas:

a) Si se colocan $ 5000.- a cierta tasa mensual se obtiene en un mes un interés, igual a la quinta parte de lo invertido, ¿cuál es la tasa a la cual se colocó el dinero? **(Argentina, año ....?)**

b) Un pozo común posee $1500 se reparte entre cierta cantidad de individuos de manera tal que cada uno de ellos obtiene $45, y aún quedan $5 por individuo en el fondo común,¿cuántas personas son los beneficiarios de dicho fondo? **(y porqué no repartieron todo?)**

c) Cierto evento escolar convoca a 1500 estudiantes, los cuales para una mejor organización se han distribuido de tal manera que cada 45 estudiantes debe existir un tutor. Si se sabe que después de la división sólo un tutor no tiene 45 estudiantes sino 15 **(acomodo)** , ¿cuántos tutores había?

d) Se le informa a un comerciante que el precio con recargo por pago en cuotas (del 24%) de cierto producto es de $434.- ¿Puede Ud. decirnos cuál es el precio del producto sin recargo.? **(¡ojo! Su respuesta es válida sólo por el día de hoy. Mañana deberá aplicar el índice de inflación dado por el INDEC, ó el incremento del precio del dólar, ó el del Euro, Ó.......)**

e) Una persona recibe una herencia que utiliza de la siguiente forma: $1/3$ de ella lo destina a comprar un automóvil, con el 20% del resto paga sus deudas y lo que queda, $ 24.000, lo deposita a plazo fijo en un banco argentino **(¡pobre...!)** ¿Cuál es el monto total de la herencia?

f) Un automovilista recorre 764 km **(es que tiene un auto con equipo de gas)** en tres etapas; en la segunda el recorrido es 124 km más que en la primera, y en la tercera el 20% más que en la primera. ¿Cuántos km recorrió en la primera etapa?

g) Cierto automovilista ha recorrrido la tercera parte de la distancia que separa dos ciudades, y sabe que si recorre 1/4 de lo que le resta le quedarán sin recorrer 120 km. ¿Cuál es la distancia que separa ambas ciudades.? **(disculpenló, el automovilista era miope...y no leyó el cartelito en la autopista)**

Advertencia: El siguiente item está fuera de contexto ¿Porqué?

h) Se sabe que la base y la altura de un rectángulo son tales la altura mide 2 cm. más que el doble de la base. Si la superficie del rectángulo es de 40 cm^2 ¿cuánto miden la base y la altura?

Actividades.

4) Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones e interprete gráficamente la situación.

a) $\begin{cases} x + 3y = -1 \\ \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x = 6 - y \\ \end{cases}$ c) $\begin{cases} 1/2\, x + 5y = 1 \\ \end{cases}$

$2x - y = 5 \qquad\qquad 6x + 2y = 10 \qquad\qquad 10y - 2 = -x$

5)
a) ¿Cuál debe ser el valor de k para que el siguiente sistema sea compatible indeterminado?

$$\begin{cases} x = 4 - k\,y \\ 2x + 2y = 8 \end{cases}$$

b) ¿Cuál debe ser el valor de m para que el siguiente sistema sea incompatible?

$$\begin{cases} 1/2\,x + 5y = 1 \\ 30y + 3x = m \end{cases}$$

6) Plantee y resuelva los siguientes problemas:

a) En una clase de Diseño el total de alumnos, varones y mujeres, es de 52. Si el número de alumnos varones es siete más que el doble de mujeres, ¿cuántas mujeres y cuántos varones hay?.

b) Dos Agrónomos han recorrido distintas distancias. La suma de las distancias recorridas por ambos es igual a 11/2 de su diferencia. Además el que recorrió la mayor de las distancias supera en 2000 km. a la recorrida por el otro. ¿Cuantos kilómetros recorrió cada uno de ellos?

c) Juan tiene el doble de clientes de los que tiene Pedro, pero si Juan le cede 10 clientes a Pedro se quedará con 6 clientes menos que Pedro. ¿Cuántos clientes tiene cada uno?

7) Resuelva y clasifique los siguientes sistemas de ecuaciones lineales.

a) $$\begin{cases} -x + y + z = 1 \\ -x + 3z = 4 \\ -2x + y = -4z + 5 \end{cases}$$

d) $$\begin{cases} y + z = 1 \\ 3x + y + 2z = 1 \\ 3x + 2y + 3z = 2 \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ 2x - 2y - z = -2 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases}$$

e) $$\begin{cases} -x + y + z = 0 \\ -2x + 2y = 0 \\ 3x + y + 2z = -4 \end{cases}$$

c) $$\begin{cases} y - 3z = 5 \\ -2x + y - 5z = 2 \\ 2x + 2z = 1 \end{cases}$$

f) $$\begin{cases} x + y = 1 \\ y + z = 1 \\ x - z = 1 \end{cases}$$

8) Plantear y resolver los siguientes problemas:

a) La ganancia de una empresa es de $14.600. La misma se distribuye entre tres socios.El segundo socio recibió el 10% menos que el primero y el tercero 3/4 partes más que lo que recibió el primero. ¿Cuánto recibió cada uno.?

b) La suma de tres números es 9, el primero representa el opuesto del doble del segundo y el tercero es una unidad mayor que la suma del primero con el segundo. ¿Cuáles son estos números?

c) De 1350 alumnos que cursaron Álgebra se informó que el número de alumnos regulares supera al de libres en 100 y que la suma de ambos supera en 50 al número de promocionados. ¿Cuántos alumnos resultaron libres, cuántos regulares y cuántos promocionados?

d) En un estadio hay presentes 3.500 personas, las cuales han abonado distinto importe de acuerdo a su ubicación en tres sectores; $10 por la Platea A, $ 5 por la Platea B y $2 por la Popular. Además se nos informó que en la Popular hay un 50% más de personas que en la Platea B. Si la recaudación total fue de $18.000 ¿ cuántas personas había en cada sector

9) Si a ó b son distintas de cero el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} a x + b y = c \\ - a x - b y = d \end{cases}$$

a) Es incompatible siempre.
b) Es compatible indeterminado siempre.
c) Es indeterminado para $c = d$
d) Es incompatible para $c \neq -d$.
e) Ninguna de las alternativas anteriores es correcta.

10) El sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} - x + y + z = 1 \\ - x + 3 z = 4 \\ - 2 x + y = -4 z + 5 \end{cases}$$

a) Es incompatible.
b) Es compatible indeterminado.
c) Es compatible determinado con x=-1, y=-1, z=1.
d) Es compatible determinado con x= 1, y= 1, z=1.
e) Ninguna de las alternativas anteriores es correcta.

PRÁCTICO COMPLEMENTARIO

Uno de los objetivos de esta asignatura, y probablemente el más importante, es aportar una técnica para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales.
Previo a brindar este método puede ser interesante presentar casos de aplicación, que tiendan a amenizar el largo camino que implica contar con los elementos necesarios para que el método sea presentado de manera formal.

Este práctico complementario tiene por objetivo desarrollar en el estudiante cierta ductilidad en el planteo de ecuaciones y constituye un primer desafío en cuanto a la toma de decisiones con base a herramientas formales y avaladas universalmente.

En las distintas áreas de trabajo, surgen situaciones que involucran incógnitas y que generan ecuaciones, por ello las ecuaciones son importantes a la hora de resolver problemas, y el éxito de nuestro trabajo dependerá en principio de la traducción que hagamos al lenguaje matemático de dicho problema.

Frente a un problema que involucra incógnitas ¿qué pasos habrá que seguir?

- ❑ Lea detenidamente el problema hasta comprender perfectamente la situación.
- ❑ Establezca cuáles son las incógnitas asignándole letras (la descripción de las incógnitas debe ser clara y completa).
- ❑ Rescate del enunciado los datos.
- ❑ Indague las relaciones existentes entre los datos y las incógnitas.
- ❑ Traduzca dichas relaciones al lenguaje algebraico.

Para resolver el siguiente práctico siga las instrucciones del CUADRO anterior.

1) Luego de 15 partidos sin perder, un equipo de fútbol tiene 25 puntos, si por cada partido ganado se le asignan 2 puntos y por empate 1 punto, ¿cuántos partidos ganó y cuántos empató?

2) José cobró por cierto trabajo el doble de lo que tiene su esposa María ahorrado, pero si le da $10 a su esposa tendrá $6 más que el total de María. ¿Cuánto cobró José y cuánto tenía ahorrado María?

3) Se quiere obtener 120 kg de masa para pan a partir de la mezcla de tres ingredientes (I, II y III) . Se nos informa que para que el sabor del pan sea aceptable el ingrediente I debe representar el 20% de la mezcla de los ingredientes II y III . Además se debe poner el doble del ingrediente II que del I. ¿Cuántos kg de cada ingrediente deberá contener la mezcla?

4) A un grupo de 22 personas se les asignan 70 tareas. Las tareas se han clasificado en dos categorías: A y B. Debido a esto se las ha repartido de modo tal que cada persona del grupo tiene asignado ó 4 tareas de categoría A ó 2 de categoría B, cubriendo así exactamente el total. ¿Cuántas tareas de cada categoría se les ha asignado al grupo?

5) En una playa de estacionamiento hay 135 vehículos entre autos, motos y utilitarios. El número de utilitarios supera al de motos en 10 y la suma de ambos supera a la cantidad de autos en 5. ¿Cuántos vehículos de cada tipo hay en la playa de estacionamiento?

6) Una aleación de oro, plata y cobre es tal que 1/5 de su peso más ocho gramos es de oro; 2/5 del total más cuatro gramos es de plata y la cantidad de cobre representa 3/5 partes de oro. Investigue:

a) ¿Cuántos gramos de cada elemento contiene la aleación?
b) ¿Cuál es el peso total de la misma?

7) Un Problema De producción.

Una compañía elabora tres productos cada una de los cuales debe ser procesado en tres departamentos. La tabla 1 resume el requerimiento de las horas de mano de obra y las unidades de materia prima de cada unidad de producto. Se dispone mensualmente de 1500 horas de mano de obra y 3800 unidades de materia prima. Si se desea una combinación de los tres productos que totalice 500 unidades, determine si existe esta combinación de manera que agote la disponibilidad de los insumos.

Tabla 1

INSUMOS	PROD. A	PROD. B	PROD. C
HORAS DE MANO DE OBRA	3	2	4

UNIDADES DE MATERIA PRIMA	10	8	6

8) Otro Problema De producción.
Una compañía elabora tres productos cada una de los cuales debe ser procesado en tres departamentos. La tabla 2 las horas requeridas por unidad de cada producto en cada departamento. Además , las capacidades semanales están dadas en horas por cada departamento. Se pide determinar si hay alguna combinación de los tres productos que agote la capacidad semanal de los tres departamentos.

Tabla 2

Departamento	Prod. 1	Prod. 2	Prod. 3	Hs. disponibles
1	2	3,5	3	1200
2	3	2,5	2	1150
3	4	3	2	1400

9) Un Problema De Mezcla.

Una nutricionista está planeando una dieta diaria que consiste en tres tipos de alimento. Conoce el aporte de vitaminas, hierro y proteínas de cada uno de los alimentos, los cuales se dan en la tabla 3. Por experiencia sabe que la dieta completa debe contener 52 unidades de vitamina, 56 unidades de hierro y 34 unidades de proteínas. Determine si existe alguna combinación de los tres alimentos que pueda satisfacer exactamente los requerimientos mínimos de vitaminas, hierro y proteínas.

Tabla 3

Tipo de alimento	Vitaminas	Hierro	Proteínas
1	4	2	1
2	6	8	6
3	3	4	2

10) En cierta oficina de gobierno se nos informa que existe una partida de $400.000que se debe destinar totalmente a tres tipos de préstamos personales de $1000, $2000 y $3000, respectivamente.
Dada la finalidad social de la iniciativa, se impone que el número de préstamos de $1000representen un tercio de la suma del número de préstamos de $2000 y $3000.
Finalmente se establece que es indispensable que se otorguen en total 200 préstamos personales.
   a) ¿cuántos préstamos de cada tipo se deberán otorgar?
   b) Si no existiera la imposición de que el número de préstamos de $1000representen un tercio de la suma del número de préstamos de $2000 y $3000 ¿qué puede concluir?
   c) ¿y si a los condicionamientos originales se le adicionara que debe haber el mismo número de préstamos de $1000 que de $2000, qué pasaría?

11) Una entidad de educación privada ha invertido en los últimos tiempos $18000 anuales en publicidad televisiva y gráfica. Para el próximo año se considera que debe reducirse lo asignado

a T.V.un 10%. Dado que la publicidad gráfica ha tenido muy buena respuesta se piensa intensificarla, con un aumento en su costo igual al 5%. Se conoce que se gastará un monto total de $17400. ¿de cuánto será la inversión en cada tipo de publicidad el próximo año?

12) Se desea obtener una mezcla de 100 litros con tres tipos de combustible (A, B y C) cuyos costos por litro son de $2, $ 1,5 y $1,3, respectivamente. El costo total de la mezcla debe ser de $153 y la cantidad de combustible A debe ser el doble de la del B ¿cuántos litros de cada tipo de combustible debe contener la mezcla?

13) El trigo disminuyó su precio desde el año pasado a este un 20%. Para comprar 6 bolsas de trigo este año gasté $1,20 menos que el año pasado para comprar 5 bolsas ¿cuál es el precio actual del trigo y cuál es el del año anterior?

14) Un inversor tiene $500.000 para invertir en tres tipos de negocios. Se espera que el primer tipo de negocio le redituará un 15% de ganancias el segundo un 10% y el tercero un 18%. La meta del inversionista es lograr un promedio del 15% entre las tres inversiones. Además la inversión en el tercer negocio debe ser del 40% del total. ¿Cuál es la alternativa que permite lograr todos estos objetivos?

15) Un fabricante de café está interesado en mezclar tres tipos de semillas, para obtener 10.000 toneladas de una sola clase. Los tres tipos de semillas cuestan $2,4 ; $2,6 y $2 respectivamente. Un experto en el tema le informa que para que el café adopte un sabor adecuado deberá introducir en la mezcla la misma cantidad de semillas A y B , y que siguiendo las indicaciones dadas el costo total será de $21.000.¿Cuál deberá ser la combinación de las tres semillas que verifique las instrucciones del experto?

16) Se posee un presupuesto de $ 200.- que se quiere destinar totalmente a publicidad. La misma se puede desarrollar por tres medios: TV, radio y avisos en periódicos. El costo de cada aviso en TV es de $5, en radio de $3 y en periódico de $1. El número total de avisos debe ser de 64 y se quiere llegar a una audiencia de 7000 personas. Los medios de divulgación nos han proporcionado los siguientes datos: Cada aviso en TV llega a una audiencia de 200 personas, cada aviso de radio a 60 y cada aviso en periódico a una audiencia de 50 personas. Calcular el número de avisos publicitarios que debemos hacer en cada medio.

17) El número de habitantes de una población B es un 50% menor que la de una localidad A. Si además se sabe que el total de ambas localidades representa el triple de los habitantes de B , ¿cuál es el número de pobladores de cada localidad.?

18) Se quieren obtener 600 grs de cierta aleación, a partir de la mezcla de tres metales (A,B,C) para ello se establece que la cantidad de A representa dos tercios de la de B y que C representa la mitad del total de A con B. ¿Cuánto de cada metal se debe introducir en la mezcla.?

19) Cierta compañía fabrica tres tipos de llantas: A, B y C, para ello cada llanta debe pasar por dos secciones de trabajo. En la primera sección se dispone actualmente de 1210 horas-hombre, mientras que en la segunda se dispone de 1090 H/H. Se desea fabricar 150 llantas. Además se sabe que en la primera sección cada llanta de tipo A requiere de 9 horas-hombre, cada llanta de tipo B requiere 7 horas-hombre y las de tipo C 5 horas- hombre. Análogamente en la segunda sección los requerimientos de horas-hombre son de 8, 5 y 7 para las llantas de tipo A, B y C respectivamente. Calcule el número de llantas de cada tipo que se pueden fabricar.

20) Se desea producir tres tipos de artículos, el I requiere 2 unidades de insumo A, 4 de B y ninguna unidad de C. El II requiere: 6, 10 y 2 unidades de insumo A, B y C respectivamente, y el III requiere: 4, 6 y 2 unidades de insumo A, B y C respectivamente. Se disponen de 24 unidades de insumo A, 42 de B y 6 de C.

a) Hallar todas las cantidades posibles de los tres productos que requieran exactamente esas cantidades de insumos.
b) Si el producto I cuesta \$60 y los otros \$10 cada unidad ¿existe una solución consistente en un costo total de \$270?

El siguiente es un resumen teórico que debe ser ampliado con los conceptos existentes en la bibliografía básica.

MATRICES:

Una **matriz de orden "mxn"** es un arreglo rectangular de números dispuestos en m filas y n columnas, los cuales se encierran entre corchetes. En general se denotan con letras mayúsculas.

Por ejemplo:

$$A=\begin{pmatrix} 7 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

en este caso A es una matriz cuyo orden es 2x3.

Cada elemento de la matriz se denota en forma genérica $\mathbf{a_{ij}}$ (donde i indica la fila donde está el elemento y j indica la columna)

De esta manera podemos establecer **<u>la estructura general de una matriz mxn</u>** como:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Otra notación que se suele utilizar es:

$$A = [\, a_{ij} \,]_{mxn}$$

Cuando el número de filas es igual al número de columnas se dice que la matriz es **cuadrada ó de orden n .**

En tal caso los elementos que están en los lugares a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn} constituyen lo que se denomina **diagonal principal de la matriz** (es decir aquellos a_{ij} donde i=j)

Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{matrix} 0 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{matrix} \longrightarrow \text{DIAGONAL PRINCIPAL}$$

<u>Actividad 1</u>: ¿cuál es la diagonal secundaria?

Matrices especiales:

Matriz nula: es aquella cuyos coeficientes son todos iguales a cero. Se suele denotar ϕ

Ej:

$$\phi_{2x3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \phi_{4x4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriz triangular superior: es aquella matriz cuadrada donde los coeficientes que están por debajo de la diagonal principal son ceros.

Ej:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>Actividad 2</u>: Defina matriz triangular inferior.

Matriz diagonal: es aquella matriz cuadrada donde los coeficientes que no están en la diagonal principal son ceros.

Ej:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz Identidad: es aquella matriz diagonal donde los coeficientes que están en la diagonal principal son todos iguales a 1. Se denota con la letra I.

Ej:

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Busque en los textos de apoyo otro tipo de matrices especiales.

Operaciones con matrices:

Suma matricial:
Dadas dos matrices del mismo orden la matriz suma será otra matriz del mismo orden que las dadas cuyos elementos de la suma de los respectivos elementos de las matrices dadas.

Propiedades de la suma matricial:

1) Asociativa $(A + B) + C = A + (B + C)$
2) Conmutativa $A + B = B + A$
3) Elemento Neutro $A + \phi = A$
4) Elemento simétrico u opuesto $A + (-A) = \phi$

Producto de un escalar por una matriz:
El producto de un escalar por una matriz es otra matriz del mismo orden que la dada cuyos coeficientes surgen del producto del escalar por los respectivos elementos de la matriz.

Propiedades:
1) Asociativa para el producto de escalares. $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$
2) Distributiva con respecto a la suma de matrices. $\alpha (A+ B) = \alpha A + \alpha B$
3) Distributiva con respecto a la suma de escalares. $(\alpha+\beta)A = \alpha A+\beta A$
4) Escalar 1 es el neutro $1. A = A$

Producto matricial:

Dadas dos matrices, A_{mxp} y B_{pxn} la matriz producto será una matriz C_{mxn} , tal que cada elemento c_{ij} de C se obtiene como la suma de los productos de los coeficientes de la fila i de A por los respectivos coeficientes de la columna j de B.

En símbolos A x B = C , donde $c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}.b_{kj}$, para i=1, . . ., m j= 1, . . . , n

Se deduce que:

1) Para que dos matrices se puedan multiplicar el número de columnas de la primera matriz debe ser igual al número de filas de la segunda matriz.
2) La matriz resultante será una matriz con tantas filas como la primera y con tantas columnas como la segunda.

Propiedades:

2) Asociativa $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$
3) Distributiva con respecto a la suma de matrices. $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$
3) Elemento absorvente. $A \times \phi = \phi$
4) Multiplicar una matriz A por la matriz identidad, adecuada, a izquierda ó a derecha da por resultado la matriz A.

Observaciones:

1) El producto matricial **No es conmutativo** (en general, $AxB \neq B \times A$)

2) $A \times B = A \times C \not\Rightarrow B=C$

3) $A \times B = \phi \not\Rightarrow A = \phi$ ó $B = \phi$

Actividad 3:

a) Busque ejemplos de 1), 2) y 3)
b) No podemos decir que la matriz identidad es el elemento neutro del producto matricial ¿porqué?

Matriz transpuesta:

Dada una matriz A su transpuesta se denota A**’** y se obtiene ubicando las respectivas filas de A como columnas de A**’.** Formalmente el elemento a_{ij} de A será el elemento a'_{ji} de A**’.**

Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 5 & 10 \end{bmatrix} \Rightarrow A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \\ -3 & 10 \end{bmatrix}$$

Observar:

Si A es de orden m x n entonces A’ es de orde n x m.

¿Cuándo es posible efectuar el producto AA’? ¿en tal caso cuál es el orden de la matriz resultante?

Propiedades de la transpuesta:

1) La transpuesta de la transpuesta es igual a la matriz original.

En símbolos $(A')' = A$

2) La transpuesta de la suma es igual a la suma de las transpuestas.

En símbolos $(A + B)' = B' + A'$

3) La transpuesta de un escalar por una matriz es igual al escalar por la transpuesta de la matriz.

En símbolos $(\alpha A)' = \alpha . A'$

4) La transpuesta del producto es igual al producto de las transpuestas en orden invertido.

En símbolos $(A \times B)' = B' \times A'$

<u>SEMINARIO 2</u>: MATRICES

Antes de resolver este práctico, revise los siguientes conceptos:

- Matrices. Definición. Orden. Notación. Matrices especiales.
- Operaciones con matrices. Suma y producto por un escalar. Propiedades.
- Matriz transpuesta. Propiedades.
- Producto matricial. Propiedades.

Actividades.

1) Considere las siguientes matrices:

$$D = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Obtenga: a) D + E b) E - F c) D + 3 F d) E - F + D

e) La combinación lineal k1 D + k2 E + k3 F siendo k1=-1; k2= 1/2 ; k3 = 2

2) Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Obtenga:

a) A' x B b) B x A c) C' x B d) C' x 2B e) A' x B x C f) (B + B') x A

3) a) ¿Qué condiciones son necesarias para efectuar la suma y el producto matricial respectivamente?

b) Determine los valores de los subíndices i, j, k, m, p, q, t, r para que la siguiente expresión matricial tenga sentido:

$$A_{5xi}\, B_{4xj} - C_{kxm}\, D_{3xp} + F_{tx2} = H_{qxr}$$

4) Para que dos matrices se puedan restar:

a) las matrices deben ser del mismo orden.
b) las matrices deben ser cuadradas.
c) el número de columnas de la segunda debe ser igual al número de filas de la primera.
d) el número de filas de la segunda debe ser igual al número de filas de la primera.
e) el número de filas de la segunda debe ser igual al número de columnas de la primera.

5) Sean A y B dos matrices de orden n , I la identidad. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es falsa:

a) $A - A = \square$ b) $(A')' = A$ c) $I A = A$ d) $A - B = B - A$ e) $A + B = B + A$

6) Sea C la matriz resultante de efectuar el siguiente producto matricial:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = C$$

Entonces el valor de C_{32} es:

a) 0 b) 6 c) 3 d) -5 e) -3

7) Una matriz se llama triangular inferior cuando:

a) los elementos de la diagonal son nulos y los que están por debajo de la diagonal son distintos de cero;
b) los elementos de la diagonal son unos;
c) los elementos que están por debajo de la diagonal son todos distintos entre sí.
d) todos los elementos que están por encima de la diagonal son nulos;
e) todos los elementos de la diagonal son iguales entre sí.

8) Si A es de orden 3x5 y B es de orden 4x3, efectuando el producto entre ellas en el único orden posible se obtiene una matriz C de orden:

a) 3x3 b) 3x5 c) 4x3 d) 4x5 e) 5x4

9) ¿Cuál/les de las siguientes afirmaciones es/son verdadera/s?

a) La suma de matrices no es asociativa.
b) El producto matricial es conmutativo.
c) El producto de dos matrices del mismo orden es una matriz cuadrada.
d) El elemento neutro de la suma de matrices es la matriz identidad.
e) El elemento neutro del producto de matrices es la matriz nula.
f) La transpuesta de la transpuesta es la matriz transpuesta.
g) La transpuesta del producto es el producto de las transpuestas en el orden invertido.

10) Sea A una matriz de orden " hxj ", B es otra matriz de orden "i x 2" y C otra matriz de orden "k x r" de manera tal que (A – B) C = D, donde D posee 3 filas y 5 columnas, Obtenga los valores de h, i, j, k, r.

11) Situación problemática:
Una empresa construye tres tipos de viviendas: A, B y C. Se conoce que los requerimientos de mano de obra y materiales son los siguientes:

	Acero	Madera	Vidrio	Pintura	Mano de obra
A	5	20	16	7	17
B	7	18	12	9	21
C	6	25	8	5	13

Se quiere saber:
a) Para cada pedido en particular, de cualquier número de viviendas de cada tipo, que cantidad de materiales se necesitará.
b) Para cada lista de precios de insumos, que recepte la empresa constructora, cuáles serán los precios de costo individuales de cada tipo de casa.
c) ¿Cuál será el precio de cada tipo de casa si se desea obtener un beneficio del 16% sobre el precio de costo, y además a ese monto hay que agregarle el IVA del 18%.
d) Basados en el precio de venta cuál será el presupuesto, por tipo de vivienda, que la empresa debe girar a compradores mayoristas de estas viviendas cualquiera sea el pedido.

13) Siendo A, B y C matrices cuadradas cuál de las siguientes afirmaciones es falsa:

a) $A (B + C) = A B + A C$
b) $A \; I = A$
c) $A (B C) = (B C) A$
d) $B^2 + B = B (B + I)$
e) $C \phi = \phi$, con ϕ la matriz nula.

14) ¿Cuando una matriz se dice triangular superior?. ¿Cómo definiría la matriz identidad?¿Qué otras matrices especiales conoce?

15) Si C es la matriz que resulta de efectuar el producto A x B, entonces cómo obtiene el elemento $\mathbf{C_{ij}}$

16) ¿Cómo deben ser dos matrices para que se puedan sumar? ¿Bajo qué condición se pueden multiplicar?

17) Si C es la matriz que resulta de efectuar la siguiente operación entre matrices:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -5 & 3 & -2 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = C$$

¿Cuál es el coeficiente c_{23}?

El siguiente es un resumen teórico que debe ser ampliado con los conceptos existentes en la bibliografía básica.

VECTORES

- Un **vector de orden "n"** , es un conjunto de n elementos ordenados, los cuales se encierran entre paréntesis ó corchetes.

Por ejemplo:

V= (-1, 3, 0) es un vector de orden tres. $W = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ es un vector de orden dos.

Como vemos estos se pueden expresar en forma horizontal (**vector fila**) o en forma vertical (**vector columna**).

Cada elemento se denomina **componente**, y debido a que se trata de un conjunto **ordenado** de elementos, podemos referirnos a ellas de la siguiente manera:

V= (-1, 3, 0)

Primera componente

Tercera componente

Segunda componente

El vector que tiene todas sus componentes iguales a cero se denomina **vector nulo** y se simboliza □ .

Una notación general para los vectores de n componentes es la siguiente:

$$V = (x_1, x_2, \quad ,x_n) \quad \text{ó} \quad V = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

OBSERVACIÓN:

Haciendo uso de una visión matricial un vector fila de orden n, puede ser pensado como una matriz de una fila y n columnas es decir una matriz de orden **1xn**

Actividad 1:

¿Cómo puede ser pensado un vector columna?

Dada esta observación las operaciones definidas entre matrices y sus propiedades son válidas al trabajar con vectores.

Actividad 2:

a) ¿Cuál es la condición para que dos vectores se puedan sumar?
b) A partir de la definición de suma matricial, defina suma vectorial . Establezca sus propiedades.

Actividad 3:

A partir de la definición de producto de un escalar por una matriz, defina el producto de un escalar por un vector. Establezca sus propiedades.

- Una **combinación lineal de vectores** es una suma de productos de escalares por vectores.

Así diremos que el vector V es combinación lineal de los vectores $V_1, V_2, \ldots, V_k$ si existen escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ tales que:

$$V = \alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \ldots + \alpha_k V_k$$

INDEPENDENCIA Y DEPENDENCIA LINEAL DE VECTORES

- Un conjunto de vectores $\{ V_1, V_2, \ldots, V_k \}$ se dirá **Linealmente Independiente** (L.I.) si

$$\alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \ldots + \alpha_k V_k = \square \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0$$

Actividad 4:

Exprese con palabras esta definición simbólica.

- Un conjunto de vectores $\{ V_1, V_2, \ldots, V_k \}$ se dirá **Linealmente Dependiente** (L.D.) si

$$\alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \ldots + \alpha_k V_k = \square \quad \text{para al menos un } \alpha i \neq 0$$

Actividad 5:

Exprese con palabras esta definición simbólica.

Si busca en los textos de la bibliografía básica, los teoremas sobre independencia y dependencia lineal arribará a las siguientes conclusiones:

1) Dos ó mas vectores son L.D. si y solo si al menos uno de ellos se puede expresar como combinación lineal de los otros
2) Todo conjunto que contenga un subconjunto L.D es L.D.
3) Todo subconjunto de un conjunto L.I es LI
4) El vector nulo es LD.➔ todo conjunto que contenga al vector nulo es LD
5) Un conjunto con más de n vectores de n componentes es LD
6) Un único vector distinto del nulo es L.D.
7) Si en un conjunto de vectores (donde el nulo no este incluido) es tal que cada uno de ellos tiene más ceros que el anterior el conjunto es L I.

SEMINARIO 3: VECTORES

+Antes de resolver este práctico, revise los siguientes conceptos:

Antes de resolver este práctico, revise los siguientes conceptos:

- Vector de orden n.
- Combinación lineal de vectores.
- Independencia y dependencia lineal.

1) (Revisemos las operaciones con vectores)

Dados los vectores:

V1 = (-1, -2) ; V2 = (-2, 1) ; V3 = (0,3)

Obtener:

a) V1 + V2 b) V3 - V1 c) 3 V2 d) V3 - 2 V2

e) V1 + V2 + V3 f) 2 V1 - V2 + 3 V3 g) 2 V1 - (V2 + 3 V3)

2) Dados los vectores:

V1 = (-1, 2 , 0) ; V2 = (1, -1, 1) ; V3 = (-3, 1, 1)

Obtener:

a) 2V1 + V2 b) V3 - V1 c) -3 V2 d) V1 - 2 V2

e) $2V1 + (V2 + V3)$ f) $2 V1 - V2 + 3 V3$ g) $2 V1 - (V2 + 3 V3)$

4) Obtenga el valor de "k" (si existe) que verifique cada una de las siguientes condiciones:

a) $-2 (1,-2, 0) + (k, 1, 3) = (-2, 5 , 3)$
b) $(0, k, 1 , 0) - (1, 3, 2, 1) = (-1, 1,-1, -1)$
c) $k (3,-1, 2) = (6, -2, 4)$
d) $(2,3) + (2, 4) - k(0,0) = (4,7)$

5) Si $V_1 = (1, -2, 1)$; $V_2 = (1, -4, 1)$ y $V_3 = (-1, 3, -1)$

el resultado de la operación $V_1 - (- V_2 + 2 V_3)$ es:

a) 0 b) (2, -4 , 2) c) (0, 0, 0) d) (0, 8, 0) e) (4, -12, 4)

6) Siendo V, W , U vectores k y c escalares, cuál de las siguientes afirmaciones es falsa:

a) $(k + c) V = k V + c V$
b) Si $V - W = U \implies W = V - U$
c) $(k.c)V= (kV). (cV)$
d) $k (V + W) = k V + k W$
e) $V + W = W + V$

7) Siendo $V= (x_1, x_2, . . . , x_n)$; $W = (y_1, y_2, . . . , y_n)$ y k un escalar. Complete las siguientes idéntidades.

a) $k (V + W) = k (x_1, x_2, . . . , x_n) +$ ....

b) $(x_1 - y_1 , x_2 - y_2, . . . , x_n - y_n) =$

8) Siendo V1 = (1, 2) ; V2 = (1, 3) , k1 = 2 ; k2 = -2/3. Obtenga la combinación lineal:
k1 V1 + k2 V2

9) Determine la dependencia o independencia lineal de los siguientes conjuntos de vectores.

a) [1, 3] ; [3, 0]
b) [1, 2] ; [2, 4]
c) [1, 3] ; [3, 0] ; [0,1]
d) [3, 0, 1] ; [1, 3, 4]
e) [3, 0, 1] ; [1, 3, 4] ; [1, 0, 0]
f) [3, 0, 1] ; [1, 3, 4] ; [6, 0, 2]
g) [3, 0, 1] ; [1, 3, 4] ; [1, 0, 0]; [1, 1, 1]
h) [3, 0, 1] ; [1, 3, 4] ; [0, 0, 0]
i) [0, 0, 0, 0]
j) [1, 1, 1]
k) [1, 0, 0] ; [0, 1, 0]
l) [1, 0, 0] ; [0, 1, 0] ; [0, 0, 1]
m) [1, 2, 0] ; [-1, 1, 0] ; [0, 3, 0]
n) [-1, 2, 0 ,3] ; [-1,-2, 0, 0]
ñ) [-1, 2, 0 ,3] ; [-1,-2, 0, 0], ; [0, 0, 1, 0]; [0, 0, 0, 1]

10) Completar las siguientes afirmaciones:

a) Si dos o más vectores son linealmente dependientes entonces.. de ellos se expresa como combinación lineal del resto.

b) Dos o más vectores son linealmente .... si y sólo si el vector nulo se expresa como combinación de ellos con todos los escalares iguales a cero.

c) Dos o más vectores son linealmente .... si y sólo si el vector nulo se expresa como combinación de ellos con al menos uno de los escalares distinto de cero.

11) Dos o más vectores son linealmente independientes si y sólo si:

a) El vector nulo se expresa como combinación lineal de esos vectores únicamente con todos los escalares iguales a cero.
b) El vector nulo se expresa como combinación lineal de esos vectores únicamente con todos los escalares distintos de cero.
c) El vector nulo se expresa como combinación lineal de esos vectores con al menos uno de los escalares distinto de cero.
d) Al menos de ellos puede expresarse como combinación lineal del resto.

12) Si V1 = (-1, 4); V2 = (-1, 2) y V3 = (1, 3)

entonces la igualdad V1 - (- V2 + k V3) = (0, 12) , se verifica para:

a) k=0 b) k=2 c) k=-2 d) k=3 e) Ningún valor de k

13) Para expresar el vector (2, 0) como combinación lineal de V1 = (-1, 2) y V2 = (1, 2) , Los valores de los escalares deben ser:

a) k1= 1 k2 = 1
b) k1= 1 k2 =-2
c) k1=-1 k2 = 1
d) k1=-1/3 k2 = 2/3
e) k1=-1/2 k2 = 1/2

14) Especifique el valor de verdad de las siguientes afirmaciones:

a) Todo subconjunto de un conjunto de vectores linealmente independiente es linealmente independiente.
b) Un espacio vectorial es un conjunto de vectores, al cual se le asigna una única operación con ciertas propiedades.
c) Todo conjunto de vectores que contiene un subconjunto de vectores L.D. es L.D.
d) Un único vector es L.I.

15) Sin hacer cálculos ¿puede decir como deben ser los escalares (iguales a cero, ambos distintos de cero, al menos uno igual a cero) para expresar al vector (0, 0, 0) como combinación lineal de V_1= (-1,0,0) , V_2= (2 ,3, 0) y V_3= (1, 2, 3)?

16) Sin hacer cálculos ¿puede decir cuántas formas existen para expresar al vector (0, 0) como combinación lineal de V_1= (-1,-2) y V_2= (2 ,6) ?

17) Determine cuál de los siguientes conjuntos de vectores es Linealmente dependiente.

a) { (1, 0) ; (0 ,1)}
b) { (1, 3) ; (1/3, 1)}
c) { (1, 0, 0) }
d) { (-2, 0, 0) ; (1, 1, 1) ; (-1, 0, 1) }
e) { (5, 0, 0) ; (5, 5, 2) ; (1, 1, 0) }

18) Determine cuál de los siguientes conjuntos de vectores es Linealmente independiente.

a) { (1, 1) ; (0 ,1); (0, 0)}
b) { (-2, 3) ; (2, 0)}
c) { (0, 0, 0) }
d) { (-2, 0, 0) ; (1, 0, 1) ; (-1, 0, 1) }
e) { (5, 0, 0) ; (4, -1, 0) ; (1, 1, 0) }

19) Establezca la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones.
a) Todo conjunto que contiene un subconjunto L.D. es L.D.
b) Todo subconjunto de un conjunto de vectores L.I. es L.I.

El siguiente es un resumen teórico que debe ser ampliado con los conceptos existentes en la bibliografía básica.

DETERMINANTE

Asociada a cada matriz cuadrada A existe un número real al cual se denomina **determinante de A.** Se denota $|A|$.

Para definir formalmente el concepto de determinante son necesarios ciertos conocimientos: Permutación, número de inversiones y signo de la permutación

- **Una permutación de n elementos** es cualquier ordenamiento de esos n elementos, dos permutaciones difieren por el orden en que están ubicados los elementos.

Por ejemplo: Dados los números 1, 2 y 3 es posible obtener las siguientes permutaciones:

1 2 3 ; 1 3 2 ; 2 1 3 ; 2 3 1 ; 3 1 2 ; 3 2 1

Se puede demostrar que el número de permutaciones de n elementos es igual a

$$n\,(n-1).\,(n-2)\,.\,.\,.\;2.\,1 = \underbrace{\mathbf{n!}}_{\text{n factorial ó factorial de n}} \quad \text{(notación)}$$

En el caso del ejemplo anterior el total de permutaciones estaría dado por

$$3! = 3.2.1 = 6$$

como vemos efectivamente coincide con el total de permutaciones encontradas.

- Se dice que entre dos números cualesquiera k y m (de una permutación) hay una inversión, si $k<m$ y sin embargo m está antes que k. Por ejemplo:

  1 2 3 no tiene inversiones
  1 3 2 tiene una inversión pues 2<3 pero 3 está antes que 2
  2 1 3 tiene una inversión pues 1<2 pero 2 está antes que 1
  2 3 1 tiene dos inversiones el 2 antes del 1 y el 3 antes del 1
  3 1 2 tiene dos inversiones
  3 2 1 tiene tres inversiones

- El signo de la permutación es menos (-) cuando el número de inversiones es impar y es mas (+) cuando el número de inversiones es par.

  En los casos anteriores tenemos
  1 2 3 no tiene inversiones → (+)
  1 3 2 tiene una inversión → (-)
  2 1 3 tiene una inversión → (-)
  2 3 1 tiene dos inversiones → (+)
  3 1 2 tiene dos inversiones→ (+)
  3 2 1 tiene tres inversiones→ (-)

<u>Actividad 4</u>: encuentre las permutaciones de 4 elementos y su correspondiente signo.11

Definición formal de determinante:

El determinante de una matriz A es el número:

$$|A| = \sum_{p=i1,i2,\ldots in} sig(p)\, a_{1,i1}.a_{2,i2}.a_{3,i3}\ldots a_{n,in}.$$

"El determinante de una matriz A de orden n es el número que surge de la suma de n! términos. Cada término se obtiene como el producto de cierto signo por n factores, donde los factores son elementos de A de manera tal que ellos pertenecen a filas distintas y columnas distintas y el signo será más ó menos según la permutación de los segundos subíndices sea par o impar."

Determinante de una matriz 2x2:

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ ➔ $|A| = a_{11}\,.\,a_{22} - a_{12}\,.\,a_{21}$

Ejemplo:

Si $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$ ➔ $|A| = 2 . 8 - (-3) . 5 = 31$

Determinante de una matriz 3x3.

Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = a_{11}\,a_{22}\,a_{33} + a_{12}\,a_{23}\,a_{31} + a_{13}\,a_{21}\,a_{32} - a_{13}\,a_{22}\,a_{31} - a_{12}\,a_{21}\,a_{33} - a_{11}\,a_{23}\,a_{32}$$

Ejemplo:

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 5 & 8 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = 2\,.0.1 + (-3)\,.2\,.5 + 1.1.8 - 1.0.5 - (-3)\,.1.1 - 2.2.8 = -51$$

PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES:

1) Si se intercambian dos líneas paralelas el determinante cambia de signo pero no de valor absoluto.

Ej.

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = 31$$

Intercambiemos las dos columnas de A obteniendo una matriz $B = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 8 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow |B| = -31$

2) Si se multiplica una línea de una matriz por una constante el determinante queda multiplicado por dicha constante.

Ej.: Multipliquemos por 3 la primera fila de la matriz A del ejemplo anterior obteniendo una matriz

$C = \begin{pmatrix} 6 & -9 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow |C| = 48 - (-45) = 93$ esto es la constante 3 por el det. de A

3) Si se adiciona a una línea una constante por otra paralela el determinante no se modifica.

4) El determinante de la transpuesta de una matriz es igual al determinante de la matriz original

En símbolos: $|A'| = |A|$

5) El determinante del producto de dos matrices cuadradas es igual al producto de los determinantes de las respectivas matrices factores.

En símbolos: $|A\,.\,B| = |A|\,.\,|B|$

6) El determinante de una constante por una matriz es igual a la constante elevada al orden de la matriz por el determinante de la matriz.

Observación:
El determinante de la suma de matrices no es igual a la suma de los determinantes.

En símbolos $|A + B| \neq |A| + |B|$

7) El determinante de una matriz triangular ó de una matriz diagonal es igual al producto de los elementos de la diagonal principal.

En particular el determinante de la matriz identidad es igual a 1.
$|\mathbf{I}| = 1$

8) El determinante de una matriz es cero si y sólo si sus líneas paralelas (filas ó columnas) constituyen un conjunto de vectores L.D.

En particular el determinante de una matriz será cero:
a) Si la matriz tiene una línea nula.
b) Si la matriz tiene dos líneas proporcionales.
c) Si una línea de una matriz resulta de la combinación lineal de líneas paralelas.

SEMINARIO 4: DETERMINANTE

+ Antes de resolver este práctico, revise los siguientes puntos:

- Concepto de determinante y fórmula de cálculo de determinantes para matrices 2x2 y 3x3.
- Propiedades de los determinantes.

1) Calcule el determinante de las siguientes matrices

$$D = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & -3 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2) Aplique propiedades para obtener los siguientes determinantes.
(las matrices son las correspondientes al ej 1)

a) 2 A c) B' e) 3 (A - B)

b) A.B d) D. D' d) 100 (A + C)

3) Calcule el determinante de las siguientes matrices (Aplique propiedades)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 7 & 8 \\ 2 & -1 & 5 & 9 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

4) Si el determinante de cierta matriz A 4x4 es 5; cual ser el determinante de la matriz B que se obtiene a partir de A realizando los siguientes cambios:

a) B se obtiene intercambiando dos filas de A.
b) B se obtiene multiplicando una fila de A por 1/3.
c) B se obtiene restando a la primera fila de A , la segunda fila multiplicada por 2.

5) Sean A y B dos matrices de orden n , I la identidad. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es falsa?

a) $|A + A| = 2n\,|A|$ b) $|A'| = |A|$ c) $|\mathbf{I}| = 1$

d) $|A . B| = |A| . |B|$ e) $|A + B| = |A| + |B|$

6) ¿Cuál de las siguientes operaciones preserva el valor del determinante?

a) Multiplicar una fila por una constante no nula.
b) Multiplicar una fila por cero.
c) Sumar a una fila otra fila.
d) Sumar a una fila una constante no nula.
e) Intercambio de filas.

7) De acuerdo a la definición general de determinante de una matriz de orden n, cuál de las siguientes afirmaciones es falsa:

a) Cada término posee un elemento de cada columna de la matriz.
b) Cualquiera sea el n, su cálculo es equivalente a aplicar la regla de Sarrus.

c) El determinante es una suma de productos.
d) Cada término resulta del producto, de cierto signo por “n” coeficientes de la matriz original.
e) Cada término posee un elemento de cada fila de la matriz.

8) Siendo

$$C = \begin{matrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{matrix}$$

su determinante es:

a) -4 b) 4 c) 8 d) -8 e) 0

9) Siendo

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

su determinante es:

a) -4 b) 4 c) 8 d) -8 e) 0

10) Sabiendo que A y B son dos matrices de orden 3 con $|A| = -2$ $|B| = -3$
cuál es el valor del determinante de la matriz (-2 A B).

a) 6 b) -6 c) -12 d) 48 e) -48

11) ¿Cuál debe ser el valor de k para que el determinante de la siguiente matriz sea cero?

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & k \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

a) No existe ningun valor de k.
b) Existen infinitos valores de k. c) k = 2
d) k = -2 e) k = 0

12) Indique que le ocurre al determinante de una matriz cuando se le efectúa alguna de las siguientes operaciones.

a) Intercambio de dos columnas de A.
b) Adición de una constante a una fila.
c) Restar a una columna una constante por otra columna.
d) Multiplicar una columna de A por una constante.
e) Reemplazar una línea por la suma de dos líneas paralelas.

13) ¿Cuántos términos involucra el cálculo del determinante de una matriz 5x5, de acuerdo a la definición formal?

14) Encuentre el valor de k para que el determinante de la siguiente matriz sea DISTINTO DE CERO:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 5 \\ 1 & k & 3 \end{pmatrix}$$

15) Sólo uno de los siguientes productos puede representar uno de los términos del cálculo de un determinante de una matriz 3x3. Justifique.

a) $-a_{11}\ a_{22}\ a_{33}$ b) $a_{12}\ a_{22}\ a_{33}$ c) $-a_{13}\ a_{22}\ a_{31}$ d) $a_{11}\ a_{23}\ a_{32}$ e) $a_{11}\ a_{12}\ a_{33}$

16) ¿Cuál es el valor del determinante de la siguiente matriz? $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

17) ¿Cuál es el valor de k para que la siguiente matriz sea no singular? $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & k & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

<u>MATRIZ INVERSA</u>

OPERACIONES ELEMENTALES POR FILAS:

- Sobre una matriz se pueden realizar tres tipos de operaciones muy importantes que preservan ciertas características de la matriz y que permiten obtener información útil a la hora de resolver ecuaciones, como veremos más adelante.

Las **operaciones elementales por filas** son:

1) Intercambio de dos filas.
2) Multiplicación de una fila por una constante no nula.
3) Adición a una fila de una constante por otra fila.

Ejemplos

$$\text{Sea } A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

1) Si en A intercambiamos la 1ª fila con la 3ª fila obtenemos $B=\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

1) Si en A multiplicamos la 2ª fila por 3 obtenemos $C=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 0 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$

2) Si multiplicamos la 1ªfila de A por 2 y se la sumamos a la 3ª fila obtenemos D= $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$

Las matrices obtenidas no son iguales a la matriz A pero si son equivalentes por filas a la matriz A.

Formalmente:

- Dos matrices se dicen **equivalentes por filas** si una se obtiene a partir de la otra, a través de una cantidad finita de operaciones elementales por filas.

Se simboliza $A \sim B$

En el ejemplo anterior $A \sim B$; $A \sim C$; $A \sim D$

Se puede demostrar que esta relación de equivalencia es transitiva, es decir

Si $A \sim B$ y $B \sim C$ entonces $A \sim C$

Si las operaciones elementales se efectúan sobre una matriz identidad la matriz reultante recibe el nombre de matriz elemental. Diremos entonces que:

- Una **matriz elemental** es aquella que surge de la matriz identidad a partir de una operación elemental por filas.

Aquí presentamos algunos ejemplos:

Partiendo de la identidad de orden 3 $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

1) Intercambiando 2ª con 3ª obtenemos la matriz elemental $E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

2) Multiplicando la 2ª fila por (–2) obtenemos la matriz elemental $E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

3)Sumando a la 1ª fila de la I, la 2ª fila previamente multiplicada por (–2) obtenemos la matriz elemental $E_3 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Propiedad fundamental de las matrices elementales:

Si se realiza una operación elemental sobre una matriz A_{mxn}, obteniendo una matriz C_{mxn} y se realiza la misma operación elemental sobre la matriz identidad de orden m (I) obteniendo una matriz E de orden m entonces E.A = C.

Esta propiedad servirá para justificar uno de los métodos para obtener lo que se conoce con el nombre de matriz inversa.

<u>Matriz inversa:</u>

- Sea A una matriz cuadrada tal que existe una matriz B que cumple que A.B=B.A=I, entonces diremos que **A es inversible** y que **B es la matriz inversa de A**.

La matriz inversa se simboliza A^{-1}

Ejemplo: Dada la matriz A = $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ su matriz inversa es $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$

Actividad 1:
¿Cómo verificaría esta última afirmación?

Condición para la existencia de la inversa de una matriz A: A debe ser no singular, por ende cuadrada.

Proposición: Si A tiene inversa entonces su inversa es única.

Método de Jordan (para obtener la inversa de una matriz)

Se basa en aplicar en forma reiterada la propiedad fundamental de las matrices elementales.
Se parte de una matriz A ampliándola con la matriz identidad del mismo orden y se realizan operaciones elementales sobre toda esa matriz ampliada hasta obtener como equivalente a la matriz A a la identidad.

Ejemplo:

$$\left|\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right|$$

$$\left|\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right|$$

$$\left|\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right|$$

$$\left|\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right|$$

$$\underbrace{\begin{array}{cc} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{array}}_{\mathbf{A^{-1}}}$$

Hemos obtenido así la matriz inversa de la matriz dada.

Actividad 2: ¿Qué ocurriría en el procedimiento anterior si la matriz A fuera singular?

Actividad 3: ¿Qué debería modificarse en el procedimiento anterior si la matriz A fuese de orden 3?

Propiedades:

1) La matriz inversa de la inversa de una matriz es igual a la matriz original.
2) La inversa de la transpuesta es igual a la transpuesta de la inversa.
3) La inversa de un producto de matrices inversibles es igual al producto de las inversas en orden invertido.
4) La inversa de una constante por una matriz, es igual a la inversa de la constante por la inversa de la matriz.
5) la inversa de una matriz diagonal es otra matriz diagonal cuyos elementos son los correspondientes inversos de la matriz original.

Actividad 3: Exprese en símbolos las propiedades de la inversa.

SEMINARIO 5: MATRIZ INVERSA

Antes de resolver este práctico, revise los siguientes puntos:

- Matriz inversa. Concepto. Condiciones de existencia.
- Método de Gauss para la obtención de la inversa.
- Propiedades de la matriz inversa.

1) Encuentre, si existe, la inversa de cada una de las siguientes matrices.

$$D = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2) Siendo A, B y C matrices con A inversible e I la matriz identidad, entonces:
cuál de las siguientes afirmaciones es falsa:

a) $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A$
b) $A \cdot B = C \Longrightarrow B = C \cdot A^{-1}$
c) $I = A^{-1} \cdot A$
d) Si $A.B = I = B \cdot A \Longrightarrow B = A^{-1}$
e) $(A + C) \cdot A^{-1} = I + C \cdot A^{-1}$

3) Indique la afirmación incorrecta.

a) La matriz reducida de una matriz inversible, es la identidad.
b) El determinante de una matriz inversible es siempre igual a 1.
c) El rango de una matriz inversible es el orden de la matriz.
d) La matriz inversa si existe es única.
e) Si una matriz es no singular entonces es inversible.

4) Si A es la matriz inversa de B y B es la matriz inversa de C podemos afirmar que:

a) $A = B$ b) $A.C = C.A^{-1}$ c) $A.C = I$ d) $A = C$ e) $C = I$

5) Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & k \end{pmatrix}$$

¿Cuál debe ser el valor de k para que A no tenga inversa?

6)¿Cuál debe ser el valor de k para que la matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ sea la inversa de $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ k & k \end{pmatrix}$

7) ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones, en general, son verdaderas y cuáles falsas?

a) $A. A = A$, con $|A| \neq 0 \Rightarrow A = I$
b) Si B y C son inversas de A entonces $B = C$.
c) $A. A' = I$
d) Una matriz y su inversa tienen la misma matriz escalonada reducida por filas.
e) La inversa de una matriz diagonal es otra matriz diagonal.
f) La inversa de una matriz, si existe, es única.
g) La inversa de la inversa es igual a la matriz original.
h) Una matriz y su reducida tienen la misma matriz inversa.
i) La inversa de una matriz diagonal es otra matriz diagonal.
j) La inversa de la transpuesta es igual a la transpuesta de la inversa.

8) Si A tiene por matriz reducida a una matriz B con $|B| = 0$, entonces:

a) A tiene un línea nula.
b) A tiene inversa.
c) A es regular.
d) A es singular.
e) no se puede establecer ninguna característica de A.

El siguiente es un resumen teórico que debe ser ampliado con los conceptos vertidos en clase y existentes en la bibliografía básica.

RANGO DE UNA MATRIZ:

- El **rango de una matriz A** está dado por el número máximo de líneas paralelas linealmente independientes que posee la matriz. Se simboliza **r(A).**

Dado que la definición de rango habla de líneas paralelas linealmente independientes, se puede considerar el rango fila (cuando se cuenta el número máximo de filas L.I.) ó del rango columna (cuando se cuenta el número máximo de columnas L.I) en cualquier caso se demuestra que **el rango fila es igual al rango columna**.

Por ejemplo:

Si $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -8 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ observando las filas podemos establecer que la primera y la segunda son L.I., mientras que la tercera es nula, con lo cual **el rango fila es 2**.

Si analizamos las columnas, la primera columna y la segunda son L.I. pero la tercera es múltiplo de la segunda y la cuarta es nula, así **el rango columna es 2**.

En realidad no era necesario efectuar los dos análisis ya que hemos dicho que rango fila es igual al rango columna.

Hay situaciones donde encontrar a simple vista el rango de una matriz no es sencillo, pero afortunadamente se tiene el siguiente resultado (muy importante)

Teorema:

"Matrices equivalentes por filas tienen el mismo rango."

La idea es partir de la matriz a la cual se le quiere calcular el rango y a través de operaciones elementales encontrar una matriz equivalente por filas en donde el cálculo del rango sea simple. Esto ocurre cuando la matriz está **escalonada**.

Actividad 1:

Revise en la bibliografía cuál es el concepto de matriz escalonada por filas.

Consecuencia del teorema:

"El rango de una matriz es igual al número de filas no nulas de su correspondiente matriz escalonada por filas"

Veamos un ejemplo

Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -8 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \\ 3 & -1 & -4 & 0 \end{bmatrix}$

Realicemos operaciones elementales por filas hasta escalonar la matriz, así obtenemos la matriz B

$B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -8 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ como B es equivalente por filas a A el r(A) = r(B)= 2

Actividad 2:

Sea $C = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -8 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & -4 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -4 \end{bmatrix}$ escalone por filas y verifique que su rango es 3.

Actividad 3:

Revise en la bibliografía cuáles son las propiedades del rango de una matriz.

Un concepto que será útil más adelante es el de matriz escalonada reducida por filas.

- Una matriz se dirá **escalonada reducida por filas** si :

  - El primer elemento no nulo de cada fila es 1.
  - Cada fila no nula tiene más ceros a izquierda que la anterior.
  - Todos los elementos que están por encima y por debajo de ese primer elemento no nulo son ceros.
  - Si hay filas nulas, éstas se ubican como últimas filas.

<u>**SEMINARIO 6**</u>**:** RANGO DE UNA MATRIZ

Antes de resolver este práctico, revise los siguientes puntos:

- Operaciones elementales por filas
- Matriz escalonada por filas.
- Matriz reducida por filas.
- Matrices equivalentes por filas
- Concepto de rango.

1) Obtenga una matriz equivalente por filas en cada caso:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2) Indique cual/les de las siguientes matrices es/son escalonada reducida por filas.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ g) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ h) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

3) Establezca la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones

a) Matrices equivalentes por filas tienen el mismo rango.
b) Matrices equivalentes por filas tienen el mismo determinante.

4) En cada una de las matrices dadas en el ejercicio 2 determine el rango.

5) Determine el rango de cada una de las siguientes matrices.

$$D = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & -3 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 7 & 8 \\ 2 & -1 & 5 & 9 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

6)¿Cuál es el rango de la matriz A?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

7) Una matriz escalonada reducida por filas:

a) Tiene el primer elemento no nulo de cada fila igual uno.
b) Debe ser igual a la identidad.
c) Solo puede contener ceros y unos.

d) Tiene el primer elemento no nulo de cada columna igual uno.
e) Todas las anteriores son correctas.

8) El rango de una matriz es:

a) el número de filas no nulas de la matriz.
b) el número de filas nulas de la matriz.
c) el número de filas no nulas de la matriz reducida.
d) el número de filas nulas de la matriz reducida.
e) el número de filas linealmente dependientes de la matriz.

9) El rango de la siguiente matriz

$$C = \begin{matrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{matrix}$$

es: a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

10) Dos matrices se dicen equivalentes por fila cuando:

a) tienen el mismo rango.
b) tienen el mismo determinante.
c) una se obtiene a partir de la otra mediante operaciones elementales por fila.
d) son iguales.
e) tienen el mismo numero de filas y de columnas.

11) Si dos matrices cuadradas tienen el mismo rango se puede asegurar que:

a) tienen el mismo determinante.
b) tienen la misma matriz inversa.
c) tienen la misma cantidad de filas Linealmente independientes.
d) tienen la misma matriz ampliada.
e) tienen la misma cantidad de filas no nulas.

12) Sea A de orden n tal que su determinante es nulo, entonces:

a) r(A) = n
b) r(A) < n
c) A es no singular.
d) A es regular.
e) A posee inversa.

13) La siguiente matriz ,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Está escalonada, reducida por filas y su rango es 4.
b) Está escalonada pero no reducida por filas y su rango es 3.
c) Está reducida, pero no escalonada por filas y su rango es 3.
d) Está escalonada, pero no reducida por filas y su rango es 4.
e) No está escalonada ni reducida por filas y su rango es 3.

14) Si A es una matriz de mxn , B otra matriz , ¿cuál de las siguientes expresiones simbólicas es verdadera y cuál es falsa?

a) $r(A.B) \leq \text{mín}\{ r(A), r(B) \}$
b) $r(A) \leq \text{mín}\{ m, n \}$
c) $A \sim B \Rightarrow r(A) = r(B)$
d) $r(A . A') = r(A). r(A')$
e) Si I es la matriz identidad de orden n, entonces r(I) = n.
f) Matrices equivalentes por filas tienen el mismo rango.
g) Matrices equivalentes por filas tienen la misma inversa.
h) Si se multiplica A por su inversa obtiene la matriz identidad.
i) Dos matrices de distinto orden NO pueden ser equivalentes por filas.
j) Matrices equivalentes por filas tiene la misma matriz reducida escalonada por filas.

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas puede ser expresado en forma general como:

$$\begin{cases} a_{11}\ x_1 + a_{12}\ x_2 + ... + a_{1n}\ x_n = b_1 \\ a_{21}\ x_1 + a_{22}\ x_2 + ... + a_{2n}\ x_n = b_2 \\ \\ a_{m1}\ x_1 + a_{m2}\ x_2 + ... + a_{mn}\ x_n = b_m \end{cases}$$

donde

x_j representa la incógnita "j" para j = 1, . . . ,n

a_{ij} indica el coeficiente en la ecuación "i " que acompaña a la incógnita "x_j" , para i= 1, . ,m j= 1, . . ., n

b_i indica el término independiente de la i-ésima ecuación.

Asimismo tenemos su representación en **forma matricial** como sigue**:**

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . . . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . . . & a_{2n} \\ \\ a_{m1} & a_{m2} & . . . & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \\ b_m \end{bmatrix}$$

o en notación abreviada

$$A\ X = B$$

Donde A es la **matriz de los coeficientes del sistema** , X es el **vector de incógnitas** y B es el **vector de términos independientes**.

Una **solución del sistema** es un conjunto de valores de $x_1, x_2, \dots x_n$ que satisface simultáneamente todas las ecuaciones.

Dos **sistemas** se dirán **equivalentes** cuando tengan exactamente las mismas soluciones.

Nota:
Existen numerosos métodos de resolución, recordarán, por ejemplo, el método de sustitución, estudiado en el ciclo secundario, o quizás hayan visto en alguna oportunidad el método por igualación.
Si bien estos son métodos válidos, pero cuando el número de incógnitas y/o el número de ecuaciones aumenta, su aplicación es engorrosa y los cálculos se complican.
Existen también métodos de resolución que son sólo aplicables a sistemas con el mismo número de incógnitas que de ecuaciones.
Sin temor a equivocarnos podemos establecer que el método de mayor importancia, por su practicidad y su uso sin restricciones es el Método de Gauss-Jordan.

Antes de implementar el método, recordemos como se clasifican los sistemas de ecuaciones lineales:

CLASIFICACIÓN DE LOS SISTEMAS DE ACUERDO AL TIPO DE SOLUCIÓN:

SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES
- COMPATIBLE (Cuando tiene solución)
  - DETERMINADO (solución única)
  - INDETERMINADO (infinitas soluciones)
- INCOMPATIBLE (Cuando no tiene solución)

Propiedad fundamental de equivalencia:

Si en un sistema lineal de m ecuaciones con n incógnitas se le adiciona a una de sus ecuaciones el producto de una constante por otra de las ecuaciones, el sistema resultante es equivalente al original.

Además es claro que si se intercambia el orden de las ecuaciones o si se multiplica una ecuación por una constante distinta de cero, no se alteran las soluciones del sistema.
Esto nos lleva a pensar en la posibilidad de pasar de un sistema complicado a uno de estructura mucho más simple pero equivalente al original, realizando estas ‘operaciones’ con las ecuaciones del sistema.

Siguiendo con la idea de usar como herramienta a las matrices, estas operaciones las efectuaremos sobre las filas de la matriz ampliada del sistema.

La matriz ampliada del sistema surge de agregar el vector de términos independientes a la matriz de coeficientes del sistema. La denotaremos **A|B** .

En general

$$A|B=\left(\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

El siguiente teorema nos da la condición necesaria y suficiente para que un sistema de ecuaciones lineales sea compatible.

Teorema de Rouche-Frobenius:

Un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas será compatible si y sólo si el rango de la matriz de coeficientes del sistema es igual al rango de la matriz ampliada correspondiente.

Corolario:

Si un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas es compatible este tendrá solución única si y sólo si el rango de la matriz de coeficientes del sistema es igual al número de incógnitas.

Estas conclusiones se pueden esquematizar como sigue:

$$\text{SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES} \begin{cases} \text{COMPATIBLE } r(A) = r(A|B) \begin{cases} \text{DETERMINADO } r(A) = r(A|B) = n \\ \text{INDETERMINADO } r(A) = r(A|B) < n \end{cases} \\ \text{INCOMPATIBLE } r(A) < r(A|B) \end{cases}$$

Método de Gauss-Jordan

Partiendo de la matriz ampliada y mediante operaciones elementales por filas sobre dicha matriz, se busca la matriz escalonada reducida de A, con ello se obtiene la matriz ampliada de un sistema de ecuaciones equivalente al original pero cuya resolución es prácticamente inmediata y cuya caracterización en cuanto al tipo de soluciones resulta de aplicar el Teorema de Rouche-Frobenius.

A continuación veremos algunos ejemplos simples.

1) $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x - 2y = 3 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x - 2y = 1 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x + 3y = 1 \\ -2x - 6y = -2 \end{cases}$

1)

$\left|\begin{array}{cc:c} 2 & 1 & 1 \end{array}\right|$ Partimos de la matriz ampliada del sistema y operamos por filas

$\begin{matrix} 1 & -2 & 3 \end{matrix}$ hasta obtener la matriz escalonada reducida de A.

$\begin{matrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{matrix}$ Intercambio de filas, con esto se logra obtener el elemento 1

$\begin{matrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -5 \end{matrix}$ Sumamos a la segunda fila el producto de (-2) por la primera fila.

$\begin{matrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{matrix}$ Multiplicamos a la segunda fila por (1/5)

$\begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{matrix}$ Sumamos a la primera fila, la segunda fila multiplicada por 2

$r(A) = 2$ Como $r(A) = r(A|B) = n$ el sistema es COMPATIBLE DETERMINADO

$r(A|B) = 2$ SOLUCIÓN: $x = 1$; $y = -1$ ó $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

2)

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{array}\right)$ Partimos de la matriz ampliada del sistema y operamos por filas hasta obtener la matriz escalonada reducida de A.

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$ Sumamos a la segunda fila el producto de (-2) por la primera 1

$r(A) = 1$ Como $r(A) < r(A|B)$ el sistema es INCOMPATIBLE

$r(A|B) = 2$ NO TIENE SOLUCIÓN

3)

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 1 \\ -2 & -6 & -2 \end{array}\right)$ Partimos de la matriz ampliada del sistema y operamos por filas hasta obtener la matriz escalonada reducida de A.

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ Sumamos a la segunda fila el producto de 2 por la primera

$r(A) = 1$ Como $r(A) = r(A|B) < n$ el sistema es COMPATIBLE INDETERMINADO

$r(A|B) = 1$ en este caso $x + 3y = 1 \Rightarrow x = 1 - 3y$ para cualquier valor de y

La solución se puede expresar en forma vectorial como, $X = \begin{pmatrix} 1-3y \\ y \end{pmatrix}$, $y \in \mathbf{R}$

Esta se denomina **solución general** (también podríamos haber despejado y en términos de x).

Actividad (muy importante):

1) ¿a qué se denomina **solución particular** en un sistema de ecuaciones compatible indeterminado?
2) ¿a qué se denomina **solución básica** en un sistema de ecuaciones compatible indeterminado?
3) ¿Cuál es el número máximo de soluciones posibles básicas que posee un sistema de ecuaciones lineales con n incógnitas cuya matriz de coeficientes es de rango m?

Sistema homogéneo: es aquel en el cual el vector de términos independientes es el vector nulo.
En símbolos $AX = \phi$

- Los sistemas homogéneos son siempre compatibles. ¿Por qué?.
- En caso de ser compatibles determinados la única solución es el vector nulo, esta se denomina **solución trivial**.
- En caso de ser compatibles indeterminados, ¿tienen la solución trivial?

Método de la inversa para resolver sistemas de ecuaciones lineales con el mismo número de ecuaciones que de incógnitas.

Si $AX = B$ es un sistema de ecuaciones lineales tal que A es de orden n e inversible entonces $X = A^{-1}B$.
Actividades:
1) Demuestre la afirmación anterior.
2) ¿Que relación puede establecer entre el determinante de la matriz de un sistema de n ecuaciones y n incógnitas , y la unicidad de la solución?

<u>SEMINARIO 7</u>: SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES

Antes de resolver este práctico, revise los siguientes puntos:

- Sistemas de ecuaciones lineales. Forma matricial.
- Matriz ampliada. Sistemas equivalentes.
- Método de Gauss-Jordan.
- Teorema de Rouche-Frobenius.
- Método de la inversa para resolver sistemas de ecuaciones lineales.

1) En cada una de los siguientes sistemas de ecuaciones lineales plantee la forma matricial.

a) $\begin{cases} x - 3y = 0 \\ 2x - 1 = 5y \end{cases}$

b) $\begin{cases} -2z + 4w = -2 \\ 3z - 6w = 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - z = y \\ y + z = -x \\ x - y - z = 1 \end{cases}$

2) Resolver por Gauss-Jordan realizando el correspondiente análisis de rango.

a) $\begin{cases} 2x + 4y - 2z = 0 \\ x + z = 0 \\ 3x + 2y = -z \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y = 1 \\ -x = -y - 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x - y = 1 \\ x - 2y = 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x + 3y = -1 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x - y - z = -2 \end{cases}$ f) $\begin{cases} t - 2w = u \end{cases}$

$$\begin{array}{l} x - y = 2 \\ 3x + 3y = 0 \\ -x + 2y = -3 \end{array} \qquad y - 3 = x \qquad \begin{array}{l} 2t + w - u = 0 \\ 3t - w - 2u = 1 \end{array}$$

3) Las siguientes son matrices ampliadas de sistemas de ecuaciones, luego de efectuar operaciones elementales por filas, establezca en cada caso el tipo de sistema del que se trata y encuentre la solución.

a) $\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}$ b) $\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}$ c) $\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}$

d) $\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}$ e) $\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$ f) $\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}$

g) $\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}$ h) $\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}$ i) $\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}$

4) Resolver por el Método de la inversa los siguientes sistemas

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x + 3y + 2z = 5 \\ x - y + 4z = -5 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2w + 2y = 2 \\ -w + y = -3 \end{cases}$$

5) ¿Cuál debe ser el valor de "c" para que el siguiente sistema sea compatible indeterminado?

$$\begin{cases} x - y = c \\ -x = -y - 1 \end{cases}$$

6) ¿Cuál debe ser el valor de "c" para que el siguiente sistema sea incompatible?

$$\begin{cases} 2x - 2y = c \\ -x = -y - 1 \end{cases}$$

7) Dado un sistema de ecuaciones lineales con n incógnitas, Ax=B , tal que r(A) = r(A|B) , entonces el sistema es:

a) compatible determinado o compatible indeterminado.
b) no se puede contestar por falta de datos.
c) compatible determinado.
d) compatible indeterminado.
e) incompatible.

8) Sea $\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

la matriz ampliada reducida de un sistema de ecuaciones lineales, se puede afirmar que el sistema:

a) Es compatible determinado con única solución la trivial.
b) Es compatible determinado con única solución (2, -3, 0)
c) Es compatible indeterminado con solución (0, 0, z) , para todo z real.
d) Es compatible indeterminado con solución (2, -3, z) , para todo z real.
e) Es compatible indeterminado con solución (2z, -3z, z) , para todo z real.

9) Sea

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

la matriz reducida ampliada de un sistema de ecuaciones lineales, se puede afirmar que el sistema:

a) tiene por única solución la trivial.
b) tiene infinitas soluciones.
c) es incompatible.
d) su solución se puede expresar como x=3 , y= 0 , z=0
e) su solución se puede expresar como x=3 , y= 0

10) Sea

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \end{array}\right)$$

la matriz reducida ampliada de un sistema de ecuaciones lineales, compatible indeterminado, entonces la solución (x, y ,z) , se puede expresar como:

a) (-3 z, 5 z , 0) b) (-3 z, 5 z , z)

c) (0 , 0 , z) d) (3 z, -5 z , 0) e) (3 z, -5 z , z)

11) Sea

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

la matriz reducida ampliada de un sistema de ecuaciones lineales, se puede afirmar que el sistema:

a) tiene por única solución la trivial.
b) tiene infinitas soluciones.
c) es incompatible.
d) su solución se puede expresar como x=-1 , y= 2 , z=0
e) su solución se puede expresar como x=-1 , y= 2 , z=1

12) Dado un sistema de ecuaciones lineales con n incógnitas, Ax=B , tal que
r(A) = r(A|B) > n , entonces el sistema es:

a) compatible determinado.
b) compatible indeterminado.

c) incompatible.
d) compatible determinado o compatible indeterminado.
e) es imposible que se de esta situación.

13) Sea A la matriz de coeficientes de un sistema de ecuaciones lineales del tipo $A x = B$, si la matriz reducida de A es la identidad, cual de las siguientes afirmaciones es falsa;

a) El sistema tiene solución única.
b) El determinante de A es nulo.
c) El rango de A es igual al número de columnas de A.
d) El rango de A es igual al número de filas de A.
e) El sistema se puede resolver por el método de la inversa.

14) El Teorema de Rouche-Frobenius afirma que:

a) Si dos matrices son equivalentes entonces tienen el mismo rango.
b) Si dos matrices son equivalentes entonces tienen el mismo determinante.
c) Si el rango de la matriz ampliada es igual al rango de la matriz de coeficientes de un sistema de ecuaciones lineales entonces el sistema es compatible.
d) Si un sistema tiene solución entonces el sistema es compatible.
e) Si el determinante de la matriz de coeficientes es distinto de cero entonces el sistema es compatible.

15) ¿Cuál debe ser el valor de " k " para que el siguiente sistema sea incompatible ?

$$\begin{aligned} x - y + k &= 0 \\ 4x - 4y &= 1 \end{aligned}$$

a) 0
b) 1/4
c) -1/4
d) cualquier número real distinto de 1/4
e) cualquier número real distinto de -1/4

16) Considerando el sistema expresado en forma matricial $A x = B$ con rango de A igual al rango de la matriz ampliada, entonces:

a) el sistema es compatible determinado.
b) el sistema es compatible indeterminado.
c) el sistema es incompatible indeterminado.
d) el sistema es incompatible.
e) el sistema es compatible.

17) En un sistema homogéneo con única solución:

a) El rango de la matriz de coeficientes es menor que el número de incógnitas
b) El rango de la matriz de coeficientes es igual al número de incógnitas
c) El rango de la matriz de coeficientes es mayor que el número de incógnitas
d) El rango de la matriz de coeficientes es menor que el rango de la ampliada
e) El rango de la matriz de coeficientes es mayor que el rango de la ampliada

18) Si un sistema de m ecuaciones lineales con p incógnitas (expresado en forma matricial A X = B) es compatible indeterminado entonces:

a) $r(A) > r(A|B) = m$
b) $r(A) = r(A|B) < m$
c) $r(A) = r(A|B) = m$
d) $r(A) = r(A|B) < p$
e) $r(A) < r(A|B) = p$

19)¿Cuándo un sistema se denomina homogéneo?

20) Considere un sistema de ecuaciones lineales de la forma AX = B , suponiendo que existe la matriz inversa de A, entonces cómo obtiene el vector X?

21) Un sistema homogéneo

a) tiene al menos una solución no trivial;
b) tiene al menos la solución trivial.
c) es siempre incompatible;
d) no puede ser compatible;
e) no puede ser indeterminado;

SEMINARIO 8: INECUACIONES –OPTIMIZACIÓN LINEAL

Antes de resolver este práctico, revise los siguientes puntos en el capítulo 7 de la bibliografía básica:

- inecuaciones con una incógnita.
- sistema de inecuaciones con dos incógnitas.
- región solución.
- solución óptima.

1) Resolver en forma analítica y gráfica las siguientes inecuaciones:

a) $3x - 2 \geq 0$

b) $2 + 4x \leq 3$

c) $-2x + 1 \geq -1$

d) $5x - 3 \geq 3x - 1/4$

e) $(2 - 3x) / 4 \geq (7 - 4x) / 2$

2) Encuentre la región solución a las siguientes inecuaciones:

a) $2x + 2y \geq 2$

b) $-2x + 1 \geq -y$

e) $2x - 2y \geq 2$

f) $-2x + y \geq 0$

c) $2y + 4x \leq 3$

g) $2y + x \leq 3$

d) $2y + 4x \leq 3$

g) $2y + x \leq 3$

e) $5x + y \geq 3x - 1/4$

h) $4x \leq 4(y - x)$

3) Encuentre la región solución a los siguientes sistemas de inecuaciones:

a) $\begin{cases} 2y + 4x \leq 3 \\ 2y + x \geq 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y + 2x \leq 3 \\ -2y - 4x \leq -8 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -y - 2x \leq 4 \\ 2y - x \leq 2 \\ x \leq 1 \\ y \leq 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x \geq y + 2 \\ y \geq x + 1 \\ x \geq 0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x \leq y + 2 \\ y \leq x + 1 \end{cases}$

f) $\begin{cases} y - x \leq -4 \\ y - 2x \leq 0 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x \geq 2y \\ y \geq x \\ y \leq 3 \\ x \leq -2 \end{cases}$

4) En cada uno de los siguientes problemas, se pide:
a) Defina las variables del problema. b) Plantee el problema. **(no resuelva)**

4.1) La Toy company esta planeando su programa de producción para navidad; en particular quiere saber cuántos juguetes de moda y cuántos juguetes clásicos debe producir. Un clásico lleva 10 horas de moldeo más 6 horas de naquinaria; mientras que uno de moda ocupa 5 horas de moldeo y 7 horas de maquinaria. El beneficio de un clásico es de \$8 y el de uno de moda es de \$6. Si se disponen de 40 horas de tiempo de moldeo y 32 horas de maquinaria, ¿cuántos juguetes de cada tipo se deben fabricar para maximizar beneficios?

4.2) Se ha decidido invertir hasta \$ 1.500 en la fabricación de circuitos impresos, de los cuales se pueden elaborar dos modelos para la utilización en un equipo electrónico. El costo de producir cada uno de los modelos es de \$2 y \$3 respectivamente.
Para su fabricación se requiere el uso de una maquinaria especial para el dibujo y la limpieza de los mismos, de la cual se dispone sólo de 30 hs. El tiempo de utilización de la maquinaria para cada circuito del modelo 1 es de 6 minutos y para el modelo 2 de 5 minutos.
Se ha establecido que la demanda conjunta de los circuitos es por lo menos de 300 unidades y del total del presupuesto disponible, a lo sumo el 10% deber corresponder al gasto en el modelo 1.
Se desea encontrar las cantidades de cada modelo a elaborar para minimizar los costos.

4.3) El jefe de personal de una empresa tiene que encontrar el método mas conveniente para calificar a los que solicitan trabajo en la empresa. Debe examinar a no menos de 500 aspirantes; el costo total del examen no debe pasar de \$ 8.000.- ; el tiempo total que se puede dedicar a estos exámenes no puede ser mayor de 32 hs.

Se dispone de tres tipos de prueba: A, B y C. Realizar 100 examenes de aptitud de tipo A cuesta $ 2.000 y se necesitan 10 horas; realizar 50 examenes de tipo B cuestan $ 500 y requieren 25 hs; el examen de tipo C cuesta el 40% de los de tipo A y requieren de 15 hs por cada 100 examenes.
Se ha establecido que al menos un cuarto del total de aspirantes se someta a la prueba de tipo A.
Se sabe que el 16% de los exámenes "A" , el 20% de los exámenes de tipo "B" y el 18% de los de tipo "C" producen calificaciones incorrectas.
Si cada aspirante debe rendir un solo tipo de examen, ¿cuántos exámenes de cada clase se deben realizar a los efectos de minimizar los errores en la calificación?

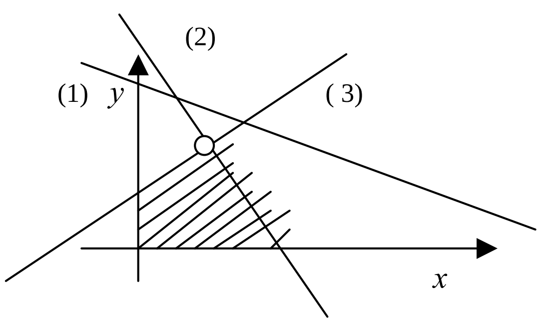
4.4) Una familia de productores agropecuarios posee 60 ha. de terreno, apto para el cultivo de soja, maíz y sorgo. los cuales redituan beneficios por ha. de $30, $20 y $19 respectivamente. Por compromisos adquiridos, la superficie cultivada con maíz debe representar como mínimo del 20 % del terreno, ademas la disponibilidad de fondos para la adquisición de plaguicidas es de $ 800, a este respecto se sabe que el gasto en plaguicida es de $16, por hectárea de soja cultivada, de $10 por hectarea de maíz y de 8 por hectárea de sorgo, se desea encontrar la cantidad de hectáreas a sembrar de cada producto, de manera que se maximice el beneficio total.

4.5) "Star" es una empresa que elabora diversos cosméticos entre ellos dos líneas líderes de perfumes: "Night" y "Day". En el proceso de producción se mezclan tres materias primas (A, B y C). Cada litro de la línea Night resulta de la combinación de 0.6 litros de A y 0.4 litros de C; mientras que un litro de la l¡nea Day surge de la mezcla de 0.3 litros de A, 0.2 de B y 0.5 de C. La compañía obtiene de utilidad $400.- por litro de la línea Night y $300.- por litro de la línea Day. Para la producción de la próxima semana se cuenta con la siguiente cantidad de materia prima:

Materia prima	cant. disponible
A	24 litros
B	2 litros
C	20 litros

Se desea saber cuántos litros han de elaborarse a los efectos de optimizar las utilidades.

5) Considere un problema de Optimización lineal con dos variables, cuya región factible se representa gráfica y algebraicamente como sigue:



Restricciones:

$$\begin{cases} (1)\quad y + \frac{1}{3}x \le 4 \\ (2)\quad 2y + 2x \le 6 \\ (3)\quad 2y - 2x \le 2 \\ x \ge 0 \quad y \ge 0 \end{cases}$$

Suponiendo que el óptimo se alcanza en “○ “, encuentre los valores que maximizan la función objetivo.

6) Resolver por el método gráfico los siguientes problemas de optimización.

a) Max z = 2 x + 10 y

e) min z = x + 2 y

$$\text{s.a.}\begin{cases} 5x + 5y \le 100 \\ 5x + 10y \le 180 \\ 10x + 5y \le 200 \\ x, y \ge 0 \end{cases}$$

b) Max $z = 5x + 10y$

$$\text{s.a.}\begin{cases} x + y \le 20 \\ x + 2y \le 36 \\ 2x + y \le 40 \\ x, y \ge 0 \end{cases}$$

c) Max $z = x + y$

$$\text{s.a.}\begin{cases} -x + y \le 2 \\ x - y \le 2 \\ x, y \ge 0 \end{cases}$$

d) Max $z = x + y$

$$\text{s.a.}\begin{cases} x + y \ge 2 \\ x + y \le 1 \\ x, y \ge 0 \end{cases}$$

$$\text{s.a.}\begin{cases} -3x + 2y \le 6 \\ x + y \le 10 \\ -x + 3y \ge 6 \\ x, y \ge 0 \end{cases}$$

f) Min $z = -500x - 400$

$$\text{s.a}\begin{cases} x + y \ge 5 \\ x - 3y \ge 0 \\ 30x + 10y \ge 135 \\ x, y \ge 0 \end{cases}$$

g) Min $z = x + y$

$$\text{s.a.}\begin{cases} x \le 4 \\ y \le 3 \\ x + 2y \ge 3 \\ x, y \ge 0 \end{cases}$$

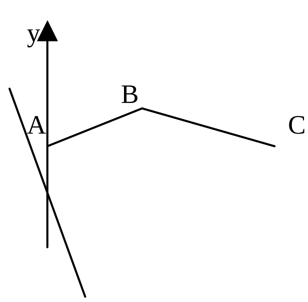
h) Min $z = x + 2y$

$$\text{s. a}\begin{cases} x \ge 4 \\ y \le 3 \\ x + 2y \ge 3 \\ x, y \ge 0 \end{cases}$$

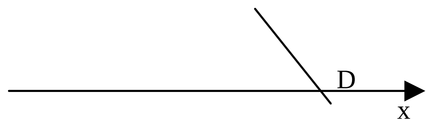
7) Muestre en forma gráfica:

a) un problema de optimización lineal con soluciones múltiples. Explique.
b) un problema de optimización lineal no acotado. Explique.
c) un problema de optimización lineal inconsistente. Explique.

8)Considere un problema de Programación lineal de maximización con dos variables, cuya región factible y función objetivo para z=30 , se representan gráficamente como sigue:

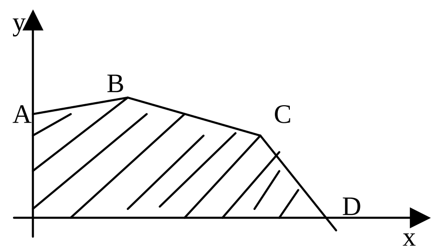


En base al mismo se puede establecer que:
a) el máx. se alcanza en el vértice A
b) el máx. se alcanza en el vértice B
c) el máx. se alcanza en el vértice C



d) el máx. se alcanza en el vértice D
e) tiene infinitos óptimos.

9)Considere un problema de Programación lineal de maximización con dos variables, cuya función objetivo es tal que en A vale 300, en B vale 250, mientras que en C y D vale 280. Si la región factible se representan gráficamente como sigue:



En base al mismo se puede establecer que:
a) el máx. se alcanza en el vértice A
b) el máx. se alcanza en el vértice B
c) el máx. se alcanza en el vértice C
d) el máx. se alcanza en el vértice D
e) tiene infinitos óptimos.

Respuestas:**SEMINARIO 1**

1)

a) x=4	**b) x=10**	**c) x= 1**
d) x= 3	**e) x=0**	**f) no tiene solución.**
g) cualquier x	**h) x=1**	**i) x=12,5**

2)

a) x=2	**b) x=0**	**c) x= 3**
d) x=-9	**e) x=6**	**f) –11/12**

3)

a) La tasa es “i = 0,2”
b) Hay 30 beneficiarios.
c) Había 34 tutores
d) El precio del producto sin recargo es de $350.
e) La herencia era de $45.000
f) Recorrió en la primera etapa 200 km
g) 240 km esla distancia entre ambas ciudades
h) La base mide 4 cm y la altura es de 10 cm.

4)

a) x=2 ; y=-1 “Las rectas tienen distinta inclinación, es decir se cortan en un punto”
b) Sistema Incompatible. “Las rectas son paralelas”
c) Sistema compatible Indeterminado. Solución : x=2-10 y ; y que pertenece a los Reales.
“Se trata de dos rectas coincidentes”

5) a) k=1 b) m distinto de 6

6) a) M=15 V=37

b)x=6500; y= 4500
c) x=28; y= 14

7)a) Sistema compatible Indeterminado x=3z-4; y=-3+2z; z $\in$R
b)Sistema compatible Determinado x=1; y=1; z=2
c)Sistema incompatible
d) Sistema compatible Indeterminado x= -z / 3; y=1-z; z $\in$R
e)Sistema compatible Determinado x= -1; y= -1; z=0
f)Sistema incompatible

8)a) x=4000; y=3600, z=7000
b) x=8; y=-4; z=5
c) X= 400; y=300; z=650
d) A=1000; B=1000; C=1500

9)Opción d)

10)Opción b)

<u>Respuestas:</u>SEMINARIO 2

1)

a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} 8 & -1 \\ -3 & -8 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ **e)** $\begin{pmatrix} 3/2 & 1 \\ -1/2 & -6 \end{pmatrix}$

2)

a) $\begin{pmatrix} 8 & -6 & 16 \\ -4 & 7 & -10 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 10 & -4 \\ 18 & -14 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 3 & -5 & -2 \end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix} 6 & -10 & -4 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 22 \\ -15 \end{pmatrix}$ **f)** $\begin{pmatrix} 12 & -7 \\ 4 & 3 \\ 34 & -24 \end{pmatrix}$

3) a)
Para que dos matrices se puedan sumar deben ser del mismo orden.
Para que dos matrices se puedan multiplicar el número de columnas de la primera debe ser igual al número de filas de la segunda.

b) i=4; j=2; k=5; m=3; p=2; t=5; q=5; r=2

4) Opción a) 5) Opción d) 6) Opción b) 7) Opción d) 8) Opción d)

9) Las verdaderas son c) y g)

10) h=i=3; j=k=2; r=5

11) Ayuda: Use matrices para organizar la información. Por ejemplo para el item a) si llamamos A a la matriz que contiene los requerimientos de insumos para cada tipo de vivienda A es de orden 3x5 y si llamamos T a la matriz que contiene las cantidades pedidas de cada tipo de vivienda entonces T es de orden 1x 3, en tal caso podemos obtener el total de cada insumo que se necesitará efectuando el producto TxA.

13) opción c)

14); 15) y 16) Conceptuales.

17) $c_{23} = -4$

<u>Respuestas:</u>SEMINARIO 3

Recuerde que al trabajar con vectores fila puede usar paréntesis ó corchete.
(Por cuestiones de espacio los resultados están expuestos como vectores fila, sin embargo si Ud lo desea puede trabajar con vectores columna)

1) a) (-3; -1) b) (1; 5) c) (-6; 3) d) (4; 1) e) (-3; 2) f) (0; 4) g) (0; -14)

2) a) (-1; 3; 1) b) (-2; -1; 1) c) (-3; 3; -3) d) (-3; 4; -2) e) (-4; 4; 2) f) (-12; 8; 2) g)(6; 2; -4)

3) a) k=0 b) k= 4 c) k= 1 d) Cualquier valor de k verifica la igualdad.

4) e)
5) c)

6) Siendo $V= (x_1, x_2, \dots, x_n)$; $W = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ y k un escalar. Complete las siguientes idéntidades.
a) $k (V + W) = k (x_1, x_2, \dots, x_n) + \mathbf{k (y_1, y_2, \dots, y_n)}$
b)$(x_1 - y_1 , x_2 - y_2, \dots, x_n - y_n) = \mathbf{(V - W)}$

7) (4/3; 2)

8) a) L.I. b)L.D. c) L.D. d) L.I.) e) L.I. f) L. D. g) L.D. h) L.D.

i) L.D. j) L.I. k) L.I. l) L.I. m) L.D. n) L.I ñ) L.I

9) Completar las siguientes afirmaciones:

a) Si dos o más vectores son linealmente dependientes entonces.....**al menos uno**.. de ellos se expresa como combinación lineal del resto.
b) Dos o más vectores son linealmente .**independientes**.................. si y sólo si el vector nulo se expresa como combinación de ellos con todos los escalares iguales a cero.
c) Dos o más vectores son linealmente ...**dependientes**...................... si y sólo si el vector nulo se expresa como combinación de ellos con al menos uno de los escalares distinto de cero.

10) opción a)
11) opción c)
12) opción c)

13) a) V b) no va c) V d) F (el vector debe ser distinto del nulo)

14)Los escalares deben ser todos iguales a cero, pues los vectores son L.I.

15)Existen infinitas formas de expresión, es decir infinitos escalares, pues los vectores son L.D

16)Opción b)
17)Opción b)
18) a) V b) V

<u>Respuestas:</u>SEMINARIO 4

1) $|D| = 2$; $|E| = -14$; $|F| = -1$; $|A| = 2$; $|B| = 30$; $|C| = 3$

2)
- **a)** $|2A| = 2^3\,|A| = 16$
- **b)** $|A\,B| = |A|\;|B| = 60$
- **c)** $|B'| = |B| = 30$
- **d)** $|DD'| = |D|\;|D'| = |D|^2 = 4$
- **e)** $|3\,(A - B)| = 3^3\,|A - B| = 0$
- **f)** $|100\,(A + C)| = 100^3\,|A + C| = 0$

3) $|A| = -2$ **(intercambiando filas se obtiene una matriz diagonal) ;**
$|B| = 6$ **(matriz triangular);**
$|C| = 0$ **(la matriz tiene una fila nula);**
$|D| = 0$ **(la matriz tiene dos filas proporcionales)**

4) a) –5 ; b) 5/3 ; c) 5

5) a) ; e) son falsas

6) c)
7) b)
8) a)
9) b)
10) e)
11) d)

12) a) cambia el signo
d) cambia
e) no cambia
f) el determinante queda multiplicado por la constante.
g) Se anula.

13) no va

14) k distinto de 5

15) c)

16) –7

17) k distinto de 2

Respuestas: SEMINARIO 5

1)

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$; **E^{-1} no existe** ; $$F^{-1} = \begin{bmatrix} 3/11 & -5/11 \\ -1/11 & -2/11 \end{bmatrix}$$

A^{-1} no existe ; $$B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -4 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$; $$C^{-1} = \begin{bmatrix} 1/4 & -1/2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/4 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

2) b) 3) b) 4) d) 5) k=-6 6) k= 1 7) falsas: c) ; h) 8) d)

Respuestas: SEMINARIO 6

3) Existen infinitas posibilidades de respuestas

2) Matrices escalonadas reducidas por filas: a) ; b) ; d) ; f) ; g)

3) a) verdadera ; b) falsa

4) a) 2 ; b) 3 ; c) 4 ; d) 1 ; e) 2 ; f) 3 ; g) 2 ; h) 3

5) r(D) = 2 ; r(E) = 2 ; r(F) = 2 ; r(A) = 3 ; r(B) = 3 ; r(C) = 3

$r(A_1) = 4$; $r(B_1) = 4$; $r(C_1) = 3$; $r(D_1) = 3$

Observar:

Si el determinante de una matriz es distinto de cero entonces la matriz tiene rango máximo, es decir el rango es igual al orden de la matriz.

¿Porqué?

6) b) ; 7) a) ; 8) c) ; 9) b) ; 10) c) ; 11) c) ; 12) b) ; 13) d) ; 14) falsas d) , h)

<u>Respuestas:</u>SEMINARIO 7

a) Sistema compatible determinado X= (3, 1)
b) Sistema compatible indeterminado X= (1 +2y, y) , $y \in R$
c) Sistema incompatible (no admite solución)

2)
a) Sistema compatible indeterminado X= (-z, z, z) , $z \in R$
b) Sistema compatible indeterminado X= (1 + y, y) , $y \in R$
c) Sistema incompatible
d) Sistema compatible determinado X= (1, -1)
e) Sistema compatible indeterminado X= (-3 + y, y, -1) , $y \in R$
f) Sistema incompatible

3)
a) Sistema compatible determinado X= (2, 3)
b) Sistema compatible determinado X= (0, 0)
c) Sistema incompatible (no admite solución)
d) Sistema incompatible
e) Sistema compatible indeterminado X= (2 - z, 3, z) , $z \in R$
f) Sistema compatible indeterminado X= (3 – 2 y, y) , $y \in R$
g) Sistema compatible determinado X= (2, 0)
h) Sistema incompatible
i) Sistema incompatible

4) b)

$$\mathbf{A^{-1}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow X = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}}_{\textbf{Vector solución}}$$

5) c = 1

6) c ≠ 2

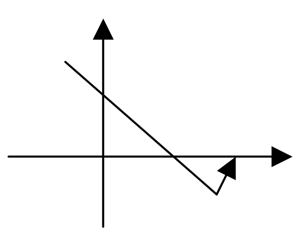
7) a)
8) e)
9) b)
10) b)
11) d)
12) e)
13) b)
14) c)

15) e)
16) e)
17) b)
18) d)
19) Cuando el vector de términos independientes es el nulo.
20) X se obtiene a través del producto $\mathbf{A^{-1}. B}$
21) b)

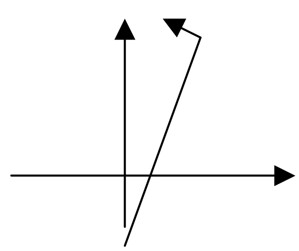
<u>Respuestas</u>: SEMINARIO 8

1) a) $x \geq 2/3$ b) $x \leq 1/4$ c) $x \leq 1$ d) $x \geq 11/8$ e) $x \geq 12/5$

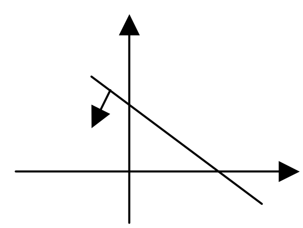
2) a) $y \geq 1-x$



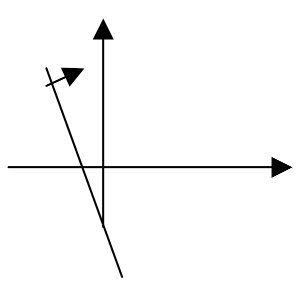
b) $y \geq 2x - 1$



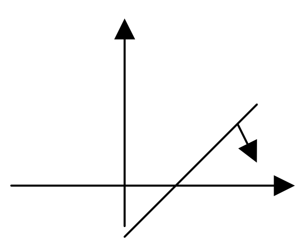
c) $y \leq 3/2 - 2x$



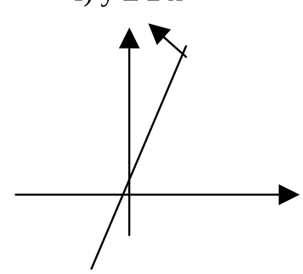
d) $y \geq -2x - 1/4$



e) $y \leq x - 1$



f) $y \geq 2x$

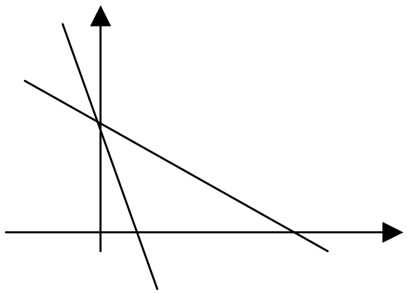


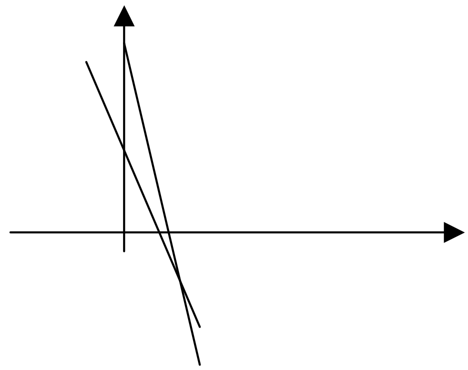
g) $y \leq 3/2 - x/2$ h) idem f)

3)

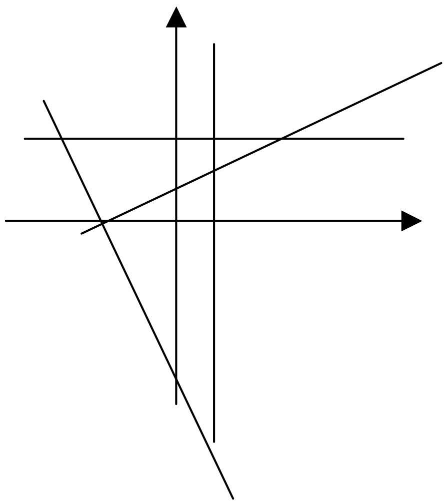
a) $\begin{cases} 2\,y + 4\,x \leq 3 & (1) \\ 2\,y + x \geq 3 & (2) \end{cases}$

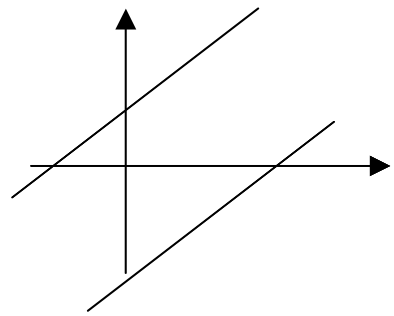
b) $\begin{cases} y + 2\,x \leq 3 & (1) \\ -2\,y - 4\,x \leq -8 & (2) \end{cases}$





c)





Respuestas Práctico complementario:

1) x: cantidad de partidos ganados
   y: cantidad de partidos empatados

Planteo:

$\begin{cases} x + y = 15 \\ 2\,x + y = 25 \end{cases}$

Respuesta: x = 10 ; y = 5

2) x = Dinero cobrado por José
   y = Dinero que tiene María ahorrado

Planteo:

$\begin{cases} x = 2\,y \\ x - 10 = y + 10 + 6 \end{cases}$

Respuesta: x = 52 ; y = 26

3) x= cantidad de ingrediente I a introducir en la mezcla.
   y= cantidad de ingrediente II a introducir en la mezcla.
   z= cantidad de ingrediente III a introducir en la mezcla.

Planteo:

$\begin{cases} x + y + z = 120 \end{cases}$

Respuesta: x = 20 ; y = 40; z = 60

x = 0,2 (y + z)
y = 2 x

4) x= cantidad de tareas de categoría A
y= cantidad de tareas de categoría B

Planteo: **Respuesta:** x = 52 ; y = 18

$$\begin{cases} x + y = 70 \\ x/4 + y/2 = 22 \end{cases}$$

5) x= cantidad de autos en la playa de estacionamiento.
y= cantidad de motos en la playa de estacionamiento.
z= cantidad de utilitarios en la playa de estacionamiento.

Planteo: **Respuesta:** x = 65 ; y = 40 ; z = 30

$$\begin{cases} x + y + z = 135 \\ z = y + 10 \\ z + y = x + 5 \end{cases}$$

6) x= cantidad de oro en la aleación
y= cantidad de plata en la aleación
z= cantidad de cobre en la aleación

Planteo: **Respuesta:** a) x = 20; y = 28 ; z = 12
b) peso total = 60 grs

$$\begin{cases} x = \dfrac{x+y+z}{5} + 8 \\ y = 2\dfrac{x+y+z}{5} + 4 \\ z = \dfrac{3}{5}x \end{cases}$$

7) x = cantidad de producto A a fabricar.
y = cantidad de producto B a fabricar.
z = cantidad de producto C a fabricar.

Planteo: **Respuesta:** x = 100; y = 200 ; z = 200

$$\begin{cases} 3x + 2y + 4z = 1500 \\ 10x + 8y + 6z = 3800 \\ x + y + z = 500 \end{cases}$$

8) x = cantidad de producto 1 a fabricar.
y = cantidad de producto 2 a fabricar.
z = cantidad de producto 3 a fabricar.

Planteo: **Respuesta:** x = 200; y = 100 ; z = 150

$$\begin{cases} 2x + 3{,}5y + 3z = 1200 \\ 3x + 2{,}5y + 2z = 1150 \\ 4x + 3y + 2z = 1400 \end{cases}$$

9) x = cantidad de alimento 1 a introducir en la mezcla.
y = cantidad de alimento 2 a introducir en la mezcla.
z = cantidad de alimento 3 a introducir en la mezcla.

Planteo: **Respuesta:** x = 4; y = 3 ; z = 6

$$\begin{cases} 4x + 6y + 3z = 52 \\ 2x + 8y + 4z = 56 \\ x + 6y + 2z = 34 \end{cases}$$

10) x = cantidad de préstamos de $1000 a otorgar.
y = cantidad de préstamos de $2000 a otorgar.
z = cantidad de préstamos de $3000 a otorgar.

a) Planteo: **Respuesta:** x = 50; y = 100 ; z = 50

$$\begin{cases} 1000x + 2000y + 3000z = 400.000 \\ x = (y + z) / 3 \\ x + y + z = 200 \end{cases}$$

b) Planteo: **Respuesta:** El problema admite infinitas soluciones

$$\begin{cases} 1000x + 2000y + 3000z = 400.000 \\ x + y + z = 200 \end{cases}$$

c) Planteo: **Respuesta:** El problema no admite solución

$$\begin{cases} 1000x + 2000y + 3000z = 400.000 \\ x = (y + z) / 3 \\ x + y + z = 200 \\ x = y \end{cases}$$

11) variables auxiliares:
x = inversión en publicidad televisiva el año anterior ➔ X = idem **este año**
y = inversión en publicidad gráfica el año anterior. ➔ Y= idem **este año**

Planteo: **Respuesta:** x= 10000 ; y= 8.000
➔ X = 9.000 Y= 8.400

$$\begin{cases} x + y = 18.000 \\ x - 0{,}1x + y + 0{,}05y = 17.400 \end{cases}$$

12) x= cantidad de litros de combustible A a mezclar
y= cantidad de litros de combustible B a mezclar

z= cantidad de litros de combustible C a mezclar

Planteo: **Respuesta:** x= ; y= ; z=

$$\begin{cases} 2x + 1{,}5y + 1{,}3z = 153 \\ x = 2y \\ x + y + z = 100 \end{cases}$$

13) x = precio del trigo el año pasado.
y = precio actual del trigo

Planteo: **Respuesta:** x= 6 ; y= 4,8

$$\begin{cases} x - 0{,}2x = y \\ 6y = 5y - 1{,}2 \end{cases}$$

14) x= cantidad de dinero a invertir en la opción 1
y= cantidad de dinero a invertir en la opción 2
z= cantidad de dinero a invertir en la opción 3

Planteo: **Respuesta:** x= 180.000 ; y= 120.000 ; z=200.000

$$\begin{cases} 0{,}15x + 0{,}1y + 0{,}18z = 75.000 \\ z = 0{,}4(x + y + z) \quad \leftrightarrow \quad z = 200.000 \\ x + y + z = 500.000 \end{cases}$$

15) x= cantidad de toneladas de semilla A a mezclar
y= cantidad de toneladas de semilla B a mezclar
z= cantidad de toneladas de semilla C a mezclar

Planteo: **Respuesta:** x= 1000 ; y= 1000 ; z=8000

$$\begin{cases} 2{,}4x + 2{,}6y + 2z = 21.000 \\ x = y \\ x + y + z = 10.000 \end{cases}$$

16) x= cantidad de avisos a realizar por T.V.
y= cantidad de avisos a realizar por radio
z= cantidad de avisos a realizar en periódicos

Planteo: **Respuesta:** x= 24 ; y= 20 ; z= 20

$$\begin{cases} 5x + 3y + z = 200 \\ x + y + z = 64 \\ 200x + 60y + 50z = 7.000 \end{cases}$$

19) x= cantidad de llantas de tipo A a fabricar
y= cantidad de llantas de tipo B a fabricar
z= cantidad de llantas de tipo C a fabricar

Planteo: **Respuesta:** x= 100 ; y= 30 ; z= 20

$$\begin{cases} 9x + 7y + 5z = 1.210 \\ 8x + 5y + 7z = 1.090 \\ x + y + z = 150 \end{cases}$$

20) x= cantidad de artículos de tipo I a producir
y= cantidad de artículos de tipo II a producir
z= cantidad de artículos de tipo III a producir

a) Planteo:

$$\begin{cases} 2x + 6y + 4z = 24 \\ 4x + 10y + 6z = 42 \\ 2y + 2z = 6 \end{cases}$$

Respuesta: algebraicamente existen infinitas soluciones

b) Planteo:

$$\begin{cases} 2x + 6y + 4z = 24 \\ 4x + 10y + 6z = 42 \\ 2y + 2z = 6 \\ 60x + 10y + 10z = 270 \end{cases}$$

Respuesta: x= 4 y= 2 z= 1