TRABAJO PRÁCTICO Nº 7: RECTAS Y PLANOS EN EL ESPACIO

1) Hallar la ecuación de los siguientes planos :

   a) Perpendicular al vector $\vec{v}=\left(-4,-\frac{1}{2},2\right)$ y pasa por el punto $(-3,-1,5)$.

   b) Paralelo a los vectores $\vec{u}=(-1,0,3)$ *y* $\vec{v}=(-2,-1,5)$ y pasa por $(-1,-1,2)$

   c) Que pasa por los puntos $(-2,1,4)$, $(-1,0,2)$ y $(-3,1,1)$.

   d) Que corta a los ejes coordenados en x = -2 , $y=\frac{1}{2}$, z = -2

2) Dadas las rectas M: $(x,y,z)=(2,0,5)+\mu(-3,4,1)$ y L: $\frac{x-1}{2}=y+2=-z$

   a) Dar dos puntos de L y escribir su ecuación vectorial.

   b) Escribir la ecuación cartesiana de M y hallar todos los vectores paralelos a ella.

   c) Escribir a la recta M como intersección de planos.

   d) Encontrar las coordenadas de los puntos que pertenecen a la recta M si $\mu=0$ y $\mu=3$.

   e) Indicar si los puntos $P=(5,-4,4)$ y $Q=(-4,8,6)$ pertenecen a la recta M. En caso afirmativo, determinar el valor del parámetro μ que corresponde a dicho punto.

3) Para los planos y las rectas dadas, hallar las intersecciones indicadas en cada caso. Si la intersección es una recta, dar su ecuación vectorial:

   a) $\pi_1:\ x-2y-z-4=0$; $\pi_2:\ 3x-8y-z=2$; $\pi_3:\ x-5y-3z-15=0$

   b) $\pi_1:\ 3x-2y+z-1=0$; $\pi_2:\ x-3y+4z=-2$

   c) L: $\frac{x-3}{-2}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z+1}{2}$; $\pi: x+2y-3z+1=0$

   d) $L: x=-2y=z;$ $\qquad \pi: x+4y+z=0$

   e) $L:\begin{cases} x=1-5\lambda \\ y=2+3\lambda \\ z=-5+\lambda \end{cases}$; $M:\begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=\lambda \end{cases}$

   f) $L:(x,y,z)=(3,1,5)+\lambda(2,-1,0)$ $\quad M:\begin{cases} x=-1-6\lambda \\ y=3+3\lambda \\ z=5 \end{cases}$

4) Sean $A=(3,4,1+2a)$ y $B=(-3,a,0)$

   a) Hallar la ecuación parmétrica de la recta que pasa por A y B.

   b) ¿Existe algún valor de a para que la recta contenga al punto $C=(9,4,6)$?

   c) ¿Existe algún valor de a para que la recta esté contenida en el plano xz?

5) El punto $P=(2,1,-1)$ se encuentra en el plano $x-y+z=0$. Determinar la forma general de las ecuaciones de las rectas que pasan por P y se encuentran contenidas en el plano dado.

6) Dada la recta L de ecuación $L=\begin{cases} x-y+z=1 \\ y+5z=0 \end{cases}$, hallar, si es posible, las ecuaciones de :

a) Un plano perpendicular a L y que pase por $(0,0,0)$.

b) Un plano paralelo a L y que pase por $(1,-3,2)$. ¿Es único el plano?

c) Un plano que contenga a L y que pase por $(-1,3,0)$.

d) Un plano que contenga a L y sea paralelo al plano $\pi: 2x-2y+2z=7$. ¿Qué sucede si cambiamos al plano π por $\pi_1: 3x-y+2=0$?

7) Hallar de dos formas distintas la distancia :

a) Del punto $(2,3,1)$ al plano $\pi: -4x-y+8z+2=0$

b) Del punto $(2,5,1)$ a la recta $L: x-3=\dfrac{y+2}{-1}=z$

8) Escribir la ecuación de un plano paralelo al plano $4x-3y+1=0$ y que diste 3 unidades del punto $(-1,3,5)$. ¿Es único?

9) a) Los vectores $\vec{u}=(1,2,1), \vec{v}=(-3,1,1)$ y $\vec{w}=(1,-4,7)$ determinan 3 aristas de un paralelepípedo. Hallar la ecuación de los planos que se encuentran en sus caras y determinar su volumen.

b) Dos caras de un cubo están en los planos $2x-2y+z-1=0$ y $2x-2y+z-5=0$. Calcular el volumen de este cubo.

10) Dadas las siguientes rectas : $L_1=\begin{cases} x+2y=0 \\ -2y+z=-5 \end{cases}$ $L_2=\begin{cases} 3x+5y=-2 \\ y=2 \end{cases}$ $L_3=\begin{cases} x+z=0 \\ x+4y-z=0 \end{cases}$

Hallar, si es posible, la ecuación de un plano que:

a) Corte a L_1 y contenga a L_2. b) Contenga a L_1 y L_3. c) Contenga a L_2 y L_3.

11) Dadas las rectas:

$$L_1=\begin{cases} 2x-y+z=0 \\ x-2y+z=1 \end{cases}; \quad L_2=\begin{cases} x-z=0 \\ 2y=0 \end{cases}; \quad L_3=\begin{cases} 2x-2z+1=0 \\ y=0 \end{cases}; \quad L_4: \frac{x-1}{-1}=y+2=\frac{z}{3}$$

Analizar si son paralelas o alabeadas, hallar su distancia y si son incidentes hallar su punto de intersección.

a) L_1 y L_2 b) L_1 y L_4 c) L_3 y L_4

12) Dadas las rectas $L_1: \begin{cases} 2x+z=1 \\ x+y=0 \end{cases}$ y $L_2: \begin{cases} 4x+y+z=1 \\ x-z=2 \end{cases}$. Hallar la ecuación del plano que pase por $(1,2,3)$ y sea paralelo a L_1 y L_2. ¿Son incidentes L_1 y L_2?

13) Sean L_1 y L_2 las rectas del ejercicio anterior. Hallar la ecuación de una recta perpendicular a:

a) L_1, que pase por $(1,3,4)$ y corte a L_2.

b) L_1, que pase por $(2,0,2)$ y corte a $L_4 = \begin{cases} x - z = 0 \\ x + y = 2 \end{cases}$ ¿Es única?

c) L_1, que pase por $(0,0,1)$ y corte a L_4. ¿Cuántas rectas hay en estas condiciones? Describirlas.

14) Sea el plano de ecuación $\pi : x + y - z = 0$; el punto $(2,3,1)$ y las rectas :

$$L_1 = \begin{cases} x = \frac{5}{2}\lambda \\ y = -5 + 5\lambda \\ z = -5\lambda \end{cases}; \qquad L_2 = \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 - \lambda \end{cases}; \qquad L_3 = \begin{cases} x = 1 - 2\lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases}$$

a) Hallar la proyección ortogonal de P, L_2 y L_3 sobre el plano dado.

b) Hallar las proyecciones de P y L_2 sobre el plano dado en la dirección de L_3.

c) ¿Es posible que la proyección de una recta sobre un plano según la dirección de otra recta sea un punto? Justificar.

15) Sean los planos π_1: $2x - y + z = 3$; π_2: $x - 2z + 1 = 0$; π_3: $4x - 2y + 2z = 1$ y las rectas $L_1 = \begin{cases} 2x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ $L_2 = \begin{cases} x - 2z + 1 = 0 \\ y + z - 1 = 0 \end{cases}$, hallar el ángulo entre: π_1 y π_2 , π_1 y π_3 , L_1 y L_2 , L_1 y π_2 , L_1 y π_1.

16) Dados los planos de ecuación π_1: $2x - y + z = 1$ y π_2: $2x + y + z = 1$. Encontrar la ecuación de un plano π tal que : *áng* (π_1 , π) = *áng* (π_2 , π) y $\pi_1 \cap \pi_2 \subseteq \pi$.

17) Dadas las rectas $L_1 = \begin{cases} 2x + 2y - 4z = 1 \\ y - z = 0 \end{cases}$ y $L_2 = \begin{cases} x + 2z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

a) Hallar la ecuación de una recta L_3 perpendicular a L_1 y L_2 que corte a ambas en puntos P y Q. ¿Qué representa la distancia entre esos puntos?

b) Hallar, si es posible, una recta paralela a $L_3\ (x, y, z) = (1,2,3) + \mu(1,1,0)$ y que corte a L_1 y L_2 en puntos A y B. La distancia entre A y B, ¿representa lo mismo que la distancia entre P y Q del inciso anterior? ¿Por qué?

18) Dado el sistema de ecuaciones $\begin{cases} ax + aby + (1-a)z = b \\ x + by + z = 2 \\ ax + ay + (1-a)z = b \end{cases}$

a) Demostrar que si $a = 0$ la solución de dicho sistema representa una recta. Hallar su ecuación vectorial.

b) ¿Para qué valores de a y de b la solución representa un plano?

c) ¿Para qué valores de a y de b la solución representa un punto?

19) Dados los tres planos π_i: $a_i x + b_i y + c_i z + d_i = 0$, $i = 1,2,3$ y sabiendo que el sistema $\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3 = 0 \end{cases}$ es incompatible, analizar todas las posiciones posibles de los planos. Dibujar cada caso.

20) Determinar bajo qué dirección debe ser lanzada rectilíneamente una partícula desde el punto (2,2,3) hacia la recta $L: (x, y, z) = (0,1,0) + \mu(0,1,-1)$ para que la alcance al cabo de dos segundos, siendo su velocidad $\sqrt{3}\ m/s$. (Ayuda: $v = \frac{d}{t}$, donde v: velocidad, d: distancia y t: tiempo)

21) Dos aviones A y B gobernados desde la torre de control, cuyas coordenadas son el punto (0,0,0), se mueven respectivamente en los planos:

Avión A: $x + 2y + z - 4 = 0$

Avión B: $x - y + z - 1 = 0$

El avión A se encuentra en el punto (-4,2,4), mientras que el avión B está en el punto (2,5,4). Suponiendo que nos encontramos en la torre de control, queremos resolver las siguientes situaciones:

a) Si los aviones se mueven en el plano paralelo a la tierra, es decir, al plano z=0, ¿cuál será el punto de colisión que habrá que evitar? ¿Cuál es la distancia entre los aviones?

b) ¿En qué dirección habrá que conducir a los aviones para que aterricen en el mismo lugar? ¿Cuál será ese punto?

22) Justificar las siguientes preguntas:

a) Tres puntos del espacio, ¿determinan siempre un único plano?

b) ¿Es posible que la intersección de dos planos sea un punto?

c) Si una recta L es perpendicular a una de las rectas contenida en un plano, ¿podemos afirmar que la recta es perpendicular al plano?.

d) Si el director de una recta es perpendicular al normal de un plano, ¿es verdad que entonces la recta está incluida en dicho plano?

e) Dadas dos rectas L y R y un punto P, ¿siempre es posible encontrar una recta perpendicular a L que pase por P y corte a R?

f) ¿Qué posición relativa deben tener dos rectas para que determinen un plano? En cada caso de existir dicho plano, explicar claramente cómo hallarlo.

Ejercicios adicionales:

1) Sea P = (1, -1, 1) y la recta $L = \begin{cases} x+y-2=0 \\ z-1=0 \end{cases}$, hallar la ecuación de una recta *L*' tal que:

áng (*L* , *L*') = $\pi/4$, pase por P y $L \cap L' \neq \emptyset$

2) Dado el punto $P(2,-3,1)$ y el plano $x+2y+z-1=0$, hallar las coordenadas del punto simétrico de P respecto al plano.

3) Demostrar que que los tres planos $a_i x + b_i y + c_i z = 0,\ i = 1,2,3$ tienen un único punto en común si y sólo si $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$.

4) Dados los puntos $A = (3,1,1)$ y $B = (3,-2,\ 4)$. Hallar todos los puntos C de la recta $L: (x,y,z) = (1,-1,1) + \mu(1,1,0)$ tal que $\acute{a}ng\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = 60°$.

5) Determinar una recta tal que con las rectas $L_1: (x,y,z) = (2,1,4) + \mu(1,1,0)$ y $L_2: x-2 = y-1 = z-3$ determinen un triángulo de área $5u^2$.